内的確率測度とフィルタリングアルゴリズムによる整合測度の構成
Construction of Coherence Measure from Internal Probabilistic Measure and Filtering Algorithm

上田恭平

Abstract

Following Siebel[12], we introduce coherence measures in the mathematical study of coherentism. In this paper, firstly, we construct a new coherence measure through considering Siebel's criticism for coherence measures. Using a simple algorithm, provisionally called filtering algorithm, almost counterexamples by Siebel can be eliminated. Our coherence measure is based on Olsson's measure. Moreover, we will extend the probabilistic measure into the internal hyperfinite probabilistic measure by employing nonstandard analysis and show that hyperfinite measure is more intuitive than standard measures. Finally, we also introduce fuzzy set theory to eliminate Siebel's last counterexample.

1 研究テーマ

本稿では，Siebel の批判に基づいて整合主義者らによる整合測度の構成を概観し，その検討を通して新たな整合測度を構成する．また，採用されるべき整合測度がなんであれ，超準解析の手法がその正当化に貢献することを示し，整合測度の構成に内的超有限確率測度を用いることを提案する．加えて，現在取り組んでいる課題としてファジィ集合論の適用についても触れる．

2 研究の背景・先行研究

「整合性」を確率論の言葉で定式化しようという試みは何度か繰り返されてきた．その中でも Shogenji [11] をはじめとする整合測度（coherence measure）の構成，すなわち入力された信念集合 [1] の列 $\mathcal{S} = (A_i)_{i \in I}$ に応じてそれらがどれだけ整合的であるかを示す実数を返すような函数 C を考える，という方針は明快である．しかし，Siebel [12] が指摘するように，我々の直観に沿った整合測度の構成は困難である．Siebel は整合測度が直観に反するような値を返すおそれのある 5 つの場合を提示した．

1. 一方の信念が他方の信念の否定を含む場合．例えば，Research Notes のある投稿者が日本科学哲学会に所属していることを $\varphi(A)$，科学基礎論学会に所属していることを $\varphi(B)$ で表すことにすると，A は B^c を含む [2]．多くの整合測度は A と B を両方とも含む信念体系を「不整合」であると判定してしまう．

2. 信念体系に含まれる信念の論理積あるいは論理和を信念体系に加えた場合.
3. 信念体系から論理的に導き出される信念を信念体系に加えた場合.
4. 信念体系に必然的真理 NT を加えた場合.
5. 排反であるが近い事象を含む場合．例えば，ある乾電池の電圧が $V_1 : 1\mathrm{V}$ であること，$V_2 : 2\mathrm{V}$ であること，$V_{50} : 50\mathrm{V}$ であることはそれぞれ互いに両立し得ないが，V_1 と V_2 は V_1 と V_{50} よりもなんらかの意味で整合的な組である，ということを表現したい．しかし，この問題はいずれの整合測度もクリアできていない [3].

以下，代表的な整合測度の定義を眺めてみる．$\mathcal{B}$ を事象（信念集合）の集合，$P : \mathcal{B} \to [0,1]$ を確率測度とする.

Definition 1 (Shogenji, 1999)

$$C_S(A_1, A_2, \cdots, A_n) \overset{\text{def}}{=} \frac{P(\bigcap_{j=1}^n A_j)}{\prod_{i=1}^n P(A_i)}$$

Shogenji 測度は非負値を取る．$C_S(\mathcal{S})$ が 1 未満であれば $\mathcal{S}$ は不整合，1 を越えれば $\mathcal{S}$ は整合的，と解釈される [4]．$\mathcal{S}_1 = (A, A)$ と $\mathcal{S}_2 = (A, A, A)$ という同じ信念体系を表す列の整合性を比較すればわかるように [5]，この整合測度は好きなだけ増大させることができてしまう．また，Shogenji 測度には Siebel の反例のうち 4 番目以外 [6] が当てはまる．第 1 反例について見てみよう．A_2 が A_1^c を含むような (A_1, A_2) を考えると，$C_S(A_1, A_2) \leq 1$ となる [7]．$P(A_2) < 1$ のとき，$C_S(A_1, A_2) < 1$ となるから，必ず不整合であると判定されてしまう.

Definition 2 (Olsson, 2002)

$$C_O(A_1, A_2, \cdots, A_n) \overset{\text{def}}{=} \frac{P(\bigcap_{j=1}^n A_j)}{P(\bigcup_{i=1}^n A_i)}$$

Olsson 測度は 0 以上 1 以下の値を取る．$C_O(\mathcal{S})$ が 0.5 未満であれば $\mathcal{S}$ は不整合，0.5 を越えれば $\mathcal{S}$ は整合的，というわけである．Olsson 測度には第 1, 第 2 以外の反例が当てはまる．4 番目について見てみよう．$P(A_1 \cup A_2) < 1$ なる信念 A_1, A_2 と $P(NT) = 1$ なる必然的真理 NT を考えると，

$$C_O(A_1, A_2, NT) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap NT)}{P(A_1 \cup A_2 \cup NT)} = P(A_1 \cap A_2)$$

となるが，これは $C_O(A_1, A_2) = P(A_1 \cap A_2)/P(A_1 \cup A_2)$ より真に小さい．必然的真理 NT の追加によって信念体系の整合性が小さくなるなどということは不自然である．

Fitelson [3] の整合測度は構成が少しややこしい．

Definition 3 (Fitelson, 2003) ふたつの信念集合を引数に取る Fitelson 函数 $F(A_i, A_j)$ を，A_i が A_j を含むときは 1，A_i^c が A_j を含むときは -1，それ以外のときは

$$F(A_i, A_j) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A_j|A_i) - P(A_j|A_i^c)}{P(A_j|A_i) + P(A_j|A_i^c)}$$

で定義する．

$\mathcal{S} = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$ の組み合わせ集合 $\mathrm{Com}_{\mathcal{S}}$ を

$$\bigcup_{2 \le m_1 + m_2 \le n} \left\{ \left(\bigcap_{k=1}^{m_1} A_{i_k}, \bigcap_{l=1}^{m_2} A_{j_l} \right) \middle| \{i_1, \cdots, i_{m_1}\} \sqcup \{j_1, \cdots, j_{m_2}\} \subseteq [1 : n] \right\}$$

とおく．ただし，$[a : b]$ で a 以上 b 以下の整数全体の集合を表す．

整合測度 C_F は以下で定義される．

$$C_F(\mathcal{S}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{O \in \mathrm{Com}_{\mathcal{S}}} F(O)}{|\mathrm{Com}_{\mathcal{S}}|}$$

すなわち，考えられる組み合わせすべてを Fitelson 函数に適用した値の平均を返すようなものを整合測度とする．

Fitelson 測度には Siebel のすべての反例が当てはまる．2 番目について見てみよう．A_1 と A_2 が交わっているとする．$C_F(A_1, A_2, A_1 \cap A_2)$ と $C_F(A_1, A_2, A_1 \cup A_2)$ はいずれも $C_F(A_1, A_2)$ より真に大きい．しかし，これらは同じ状況を表している．

ふたつの信念集合を引数に取る函数 f を用いて

$$C_f(\mathcal{S}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{O \in \mathrm{Com}_{\mathcal{S}}} f(O)}{|\mathrm{Com}_{\mathcal{S}}|}$$

とすれば，これは Fitelson 測度の一般化になっている．f に Fitelson 函数でないものを採用した整合測度の構成は Douven & Meijs [2] などで試みられているが，こちらもやはり Siebel の反例すべてが当てはまってしまう．Siebel は Bovens & Hartman [1] による整合測度も紹介している．しかし，これもうまい構成とは言い難く，第 1 反例しか克服できていない．

Herzberg は [5] で整合主義への超準的アプローチを提示したが，整合測度への適用については触れていない．Robinson [10] によって広く知られることとなった超準解析（nonstandard analysis）は，Leibniz 流微積分学のモデル理論的手法による正当化である．これにより，イプシロン・デルタによる解析学の整備に伴って排除された「無限小」概念（そして「無限大」概念）を用いた数学が可能となる．構成は今村 [6] および竹内 [13] に従う．

推移的な宇宙（universe）$\mathbb{U}$ が ZFC の公理を必要なだけ満たしているとする．内的宇宙（internal universe）${}^*\mathbb{U}$ を考えるにあたり，以下の 4 つの公理を導入する．$\mathcal{L}_X$ を集合 X の元を定数とした一階述語論理の言語（language）とする．

Axiom 1 (自然延長) $\mathcal{L}_{\mathbb{U}}$-項 t および $\mathcal{L}_{\mathbb{U}}$-論理式 φ に対し，$\mathcal{L}_{{}^*\mathbb{U}}$-項 ${}^*t$ および $\mathcal{L}_{{}^*\mathbb{U}}$-論理式 ${}^*\varphi$ が対応．これらを自然延長（natural extension）とよぶ．

Axiom 2 (移行原理) 任意の $\mathcal{L}_{\mathbb{U}}$-閉論理式 ψ に対し，$\mathbb{U} \models \psi \Leftrightarrow {}^*\mathbb{U} \models {}^*\psi$.

Axiom 3 (共起性原理) $\mathbb{U}$ の部分集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$ が有限交叉性を持つ，すなわち任意有限個の $A_{i_1}, \cdots, A_{i_n}$ がいつでも $\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k} \neq \emptyset$ を満たすならば，$\bigcap_{i\in I} {}^*A_i \neq \emptyset$ が成立.

Axiom 4 (飽和原理) ${}^*\mathbb{U}$ は $|\mathbb{U}|^+$-飽和である．

移行原理（transfer principle）より標準数学の議論と超準数学の議論を行き来して考えることが許され，共起性原理（concurrence principle）より無限小・無限大といった理想元の存在が保証される．$b \in {}^*\mathbb{U}$ は $b = {}^*a$ なる $a \in \mathbb{U}$ が存在するとき標準的（standard）であるといい，そうでないとき超準的（nonstandard）であるという．${}^*\mathbb{U}$ の部分集合で標準集合の元であるようなものは内的（internal）であるといい，そうでないものは外的（external）であるという．以後，我々は ${}^*\mathbb{U}$ 上で数学を展開する．特に ${}^*\mathbb{R}$ を考え，その元を超実数（hyperreal number）と呼ぶ．

一様空間（uniform space）X の点 x, y に対し，X の任意の近縁（entourage）U が $(x, y) \in {}^*U$ を満たすとき，x と y は無限に近い（infinitly close）といい，$x \approx y$ と書く．$x \in X$ のモナド（monad）を $\mu(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \{y \in {}^*X \,|x \approx y\}$ で定義する．X がノルム空間で 0_X がその零元のとき，$\mu(0_X)$ の元を無限小（infinitesimal）と呼ぶ．

3　筆者の主張

本稿における筆者の主張はふたつである．ひとつは，あるアルゴリズムに従って与えられた順に信念体系を「整頓」することで Siebel の第 2，第 3，第 4 反例は解消される，というもの．これを仮にフィルタリングアルゴリズム（filtering algorithm）と呼ぶことにする．もうひとつは，超準確率論を用いることで整合測度をより直観にフィットさせることができる，というものだ．

まず，ひとつめの主張について．フィルタリングアルゴリズムは「無駄な」信念を信念体系から抜き取り，あり得ない信念，すなわち $P(A)=0$ なる A がひとつでも含まれていた場合，$P(\alpha)P(\beta)\neq 0$ かつ $P(\alpha\cap\beta)=0$ なる α と β を信念体系に加える．α と β は条件を満たすような任意の信念であるが，最終的に我々が得たいのは整合測度であるため，ここで α と β の任意性によってアルゴリズムの出力が一意的でなくなることは問題ではない．この操作により，あり得ない信念を含む信念体系は必ず整合測度 0 を返すようになる．次に，信念体系があり得ない信念を含まない場合を考える．我々がいま整頓したい「無駄な」信念は，論理積・論理和・論理的帰結・必然的真理である．

$\mathcal{S}=(A_1,A_2,A_3)$ とする．信念 A_3 に対するフィルタリングを

「$P(A_1\cap A_2)=P(A_1\cap A_2\cap A_3)$ であれば $\mathcal{S}$ から A_3 を除く」

とする．$A_3=A_1\cap A_2$ すなわち $\varphi(A_3)=\varphi(A_1\cap A_2)=\varphi(A_1)\wedge\varphi(A_2)$ のとき，$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1\cap A_2)$ となり，A_3 は $\mathcal{S}$ から除かれる．明らかに，論理和・論理的帰結・必然的真理もこのフィルタリングによって除かれる．一般の長さの $\mathcal{S}$ について，信念 A_i に対するフィルタリングを

「$P(\bigcap_{k=1}^{i-1}A_k)=P(\bigcap_{k=1}^{i}A_k)$ であれば $\mathcal{S}$ から A_i を除く」

とすれば，Siebel の反例のうちの 3 つが解消される．このアルゴリズムでは第 1 反例を解消することはできないが，フィルタリングされた信念体系を Olsson 測度で判定すれば形式的には第 5 反例以外のすべての批判をかわすことができる．フィルタリングアルゴリズムが出力する信念体系はもとの信念体系が含む信念の順序に依存するが，この性質を修正すべきかどうかは要検討である．

ふたつめの主張に移ろう．標準世界の確率測度に対応する内的確率測度，特に有限確率測度に対応する内的超有限確率測度を考える．標準的な（有限または無限の）確率測度の代わりにこれを使おう，というわけである．

内的超有限確率測度 $P:\mathcal{B}\to {}^*[0,1]$ を用いる利点は少なくともふたつある．(1) 無限和や積分などといった極限操作を経ることなく，無限個（超有限個）の事象に対応する確率が定まる．n は無限大超自然数，すなわち $n\in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$

であるとして，n 個の互いに共通部分を持たない事象 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ を考える．これは無限集合である．このとき，少なくともひとつの事象が起こる確率は $\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ となる．(2) 標準的な測度論であれば，確率が 1 であるときに，その事象が「絶対に成り立つ」ことなのか「ほとんど確実に成り立つ」ことなのかを確率のみからは判別できない．しかし，このことは内的超有限確率測度が 1 であるか，ある非負の無限小超実数 ε を用いて $1-\varepsilon$ と表されるかによって区別することができる．同様に,「絶対に成り立たない」ことと「ほとんど確実に成り立たない」ことは測度が 0 であるか非負の無限小であるかによって区別される．これらの違いをもたらす内的超有限確率測度は，標準的な測度に比べ，より直観にフィットしていると言えよう．

まとめよう．信念の超有限列全体の集合を $\mathcal{B}^\omega$ とおく．内的整合測度（internal coherence measure）を次のように構成する．

Definition 4 (Internal Coherence Measure) P を内的超有限確率測度とする．フィルタリング（filtering map）$\mathcal{F} : \mathcal{B}^\omega \to \mathcal{B}^\omega$ はアルゴリズム
「入力 $\mathcal{S} = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$ に対して：
1. $\mathcal{S}' = \emptyset$ とする．
2. $i = 2$ から n に対し，
3. 　$P(\bigcap_{k=1}^{i-1} A_k) > P(\bigcap_{k=1}^{i} A_k)$ かつ $P(A_i) \neq 0$ なら
4. 　　A_i を $\mathcal{S}'$ に加える．
5. 　$P(A_i) = 0$ なら
6. 　　α と β を $\mathcal{S}'$ に加える．
7. 　それ以外の場合は何もしない．
8. $\mathcal{S}'$ を出力する.」

に従うものとする．整合測度 C_I を次で定義する：

$$C_I(A_1, A_2, \cdots, A_n) \stackrel{\text{def}}{=} {}^*C_O \circ \mathcal{F}(A_1, A_2, \cdots, A_n).$$

4 今後の展望

Siebel の反例のうち 5 番目は，その性質上整合測度の定義をどのように工夫しても必ず発生する．筆者は現在，この問題は信念を通常のクリスプ集合（crisp set）ではなくファジィ集合（fuzzy set）で表現することによって解決されると考え，その定式化に取り組んでいる．通常の集合（クリスプ集合）はある x がその集合に属すか属さないかがハッキリしており，各クリスプ集合 A は特性函数（characteristic function）

$$m_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

で特徴づけられる．ファジィ集合は特性関数の一般化である帰属度函数（membership function）によって特徴づけられる．ファジィ集合 A の帰属度函数 m_A は 0 以上 1 以下の値を取る．例えば，次のようなファジィ集合 V を考えてみる．x をある乾電池の電圧とする．

$$m_V(x) = \begin{cases} 1, & x = 1.5 \\ 1/2, & x \in [1.3, 1.5) \cup (1.5, 1.7] \\ 1/4, & x \in (1, 1.3) \cup (1.7, 2) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

購入した 1.5V の乾電池が電圧測定によって実は 1.6V であると知ったとしても，我々の「1.5V の乾電池を購入した」という信念 $\varphi(V)$ が揺らぐことはない．実際，乾電池の初期電圧は多くの場合 1.6V であり，中には初期電圧が 1.7V のものも存在する．それでも「1.5V の乾電池を購入した」という信念は損なわれない [8]．他方，もし 100V であれば確実にこの信念は損なわれる．m_V はこの違いを表すことができている．このように，信念の曖昧さを認めれば Siebel の第 5 反例を解消することは可能であるように思われる．

注

[1] 集合を命題に写す全単射 φ によって各信念集合はある信念を表現しているとみなす．和集合は論理和，共通部分は論理積，補集合は否定，部分集合であることは含意に対応する．

[2] Research Notes に投稿するためにはふたつの学会のうち少なくとも一方に所属していなければならないため，$B^c = (A \cup B) \setminus B \subseteq A$ となっている．

[3] V_2 が V_{50} よりも V_1 に「近い」という感覚が確率の概念とはまったく関係しないことからわかるように，確率測度のみに頼る構成でこの問題を解消することは不可能である．

[4] 整合的であることと不整合であることのしきい値は Koscholke [8] に基づく．Siebel [12] は整合測度に必ずしもこのようなしきい値があるわけではないという立場に立つ．

[5] 実際，$P(A) < 1$ であれば $C_S(A, A) = P(A)^{-1} < P(A)^{-2} = C_S(A, A, A)$ となる．適用する列の長さを大きくしていけば，C_S は（まったく同じ信念体系の整合性を検査しているにもかかわらず）際限なく増大していく．この問題は本質的には Siebel の第 2 および第 3 反例の特別な場合に過ぎない．

[6] $C_S(A_1, A_2, NT) = C_S(A_1, A_2)$ となり，必然的真理 NT の追加は整合性

に影響しない．

[7] $P(A_1) = 1 - P(A_1^c) = 1 - P(A_1^c \cap A_2) \geq 1 - P(A_1^c \cap A_2)/P(A_2) = 1 - P(A_1^c|A_2) = P(A_1|A_2) = P(A_1 \cap A_2)/P(A_2)$

[8] もちろん，この事実を知らなければその限りではないだろう．文字の上では同一の信念が実際にどのようなファジィ集合に対応しているかは，あくまでも主観的にしか決定されない．

文献

[1] L. Bovens and S. Hartmann, Bayesian Epistemology, Oxford University Press, 2003.

[2] I. Douven and W. Meijs, Measuring Coherence, Synthese, **156**(3):405-425, 2007.

[3] B. Fitelson, A Probabilistic Theory of Coherence, Analysis, **63**(3):194-199, 2003.

[4] F. S. Herzberg, A Graded Bayesian Coherence Notion, Erkenntnis, **79**(4):843-869, 2013.

[5] F. S. Herzberg, The Dialectics of Infinitism and Coherentism: Inferential Justification versus Holism and Coherence, Synthese, **191**(4):701-723, 2014.

[6] T. Imamura, Nonstandard Homology Theory for Uniform Spaces, Topology Appl. **209**:22-29, 2016.

[7] 釜江哲朗, 超準的手法にもとづく確率解析入門, 朝倉書店, 1990.

[8] J. Koscholke, Evaluating Test Cases for Probabilistic Measure of Coherence, Erkenntnis, **81**(1):155-181, 2016.

[9] 西田俊夫, 竹田英二. ファジィ集合とその応用, 森北出版, 1978.

[10] A. Robinson, Non-standard Analysis, North-Holland, 1966.

[11] T. Shogenji, Is Coherence Truth Conductive?, Analysis, **59**(4):338-345, 1999.

[12] M. Siebel, Against Probabilistic Measures of Coherence, Erkenntnis, **63**(3):335-360, 2005.

[13] 竹内外史, 無限小解析と物理学, 遊星社, 1985.

(京都大学理学研究科)