部分構造論理における埋め込み定理に対する相意味論的アプローチ

田中大海

Abstract

Kanovich, Okada and Terui proved a three layered representation, which states a semantic relationship between intuitionistic linear logic and classical linear logic. In addition, they also verified there exists a sound and faithful embedding between them in terms of the three layered structure, which is very similar to Gödel translation. Modifying their methods, we showed that the three layered representation and embedding theorems hold for other substructural logics. In this report, we will focus not on the technical detail of these results but on the possibility of additionally extending them in a framework of substructural logics.

1 はじめに

相意味論（phase semantics）は Girard [3] によって導入された、線形論理に対する健全かつ完全な代数的な意味論である。特定の意味論の考察によって、それに対応する統語論上の体系の様々な性質を示すという旧来的なアイデアが、依然として線形論理の文脈においても有効であるということが、90年代にかけて相意味論を扱った様々な論文において示されてきた。岡田 [6, 7] によるカット除去定理の証明、Lafont [5] および岡田-照井 [8] による有限モデル性（そしてそこから導かれる決定可能性）の証明などがその代表例である。これらの結果に鑑みるに、完全性が成り立つという点で、相意味論は整合意味論 (coherent semantics) などの他の線形論理の意味論に対し、少なくとも証明可能性に関わる現象の分析において優っている、といえる。例えば、岡田によるカット除去を含意した強完全性の証明は、ゲンツェン流のカット除去アルゴリズムを与えてはいないものの、高階の線形論理に対するカット除去定理を容易に示すことに成功している。

意味論的な動機に即した研究としては、これらの論文からはやや後の時期のものとして、Kanovich-岡田-照井 [4] が挙げられる。そこでは、任意の直観主義相空間が、ある古典相空間の部分空間になるという興味深い結果が示されている。Kanovich らはこの結果を用いて、いくつかの系を導いている。第一に、直観主義相空間に対する新しい閉包作用素の定義である。様々な閉包作用素の定義を与えることによって直観主義相空間を定義するという試みが、Abrusci [1] や岡田 [6, 7] によってなされてきたが、それらはいずれも二階の定義として与えられてきた [1]。しかし、直観主義相空間が古典相空間の部分空間であるという性質から直ちに、一階の定義を与えることが可能となる。第二に、直

観主義線形論理 **ILL** がある特殊な直観主義相モデルのクラスに対して完全であることが示されている。このクラスのモデルは準古典的 (quasi-classical) 相モデルと呼ばれ、外見上は非常に古典相空間に近いものの、$\perp$ が一般にはその台集合の部分集合にならないという点で、古典相空間よりも一般的な構造を持っている。さらに第三の系として、**ILL** から古典線形論理 **LL** への、証明可能性に関する埋め込み定理を導くことができる。これ以前に、Schellinx [9] が、$\perp$ と $\mathbf{0}$ を言語から取り除いた直観主義線形論理は古典線形論理と完全に証明能力が一致するという結果を示していたが、Kanovich らの埋め込みは翻訳こそやや複雑なものの、線形論理の結合子および定数をすべてカバーした結果であるという点で Schellinx の結果を拡張させることに成功している。

我々は、Kanovich らの証明したこれらの定理および系と同様のものほぼすべてが、部分構造論理の広範囲において成り立つということを予想している。さらに、我々はこれらの命題が一部の部分構造論理に対して成り立つことを示すに至っている。ここでは紙面の制約上、それらに対して証明を与えることはできないため、本研究を発展させた完成版において詳細な証明を与えることにしたい。したがって我々はそれらの証明の詳細に対してではなく、それらが Kanovich らの挙げた結果とどういった点で対応しており、どういった点で異なっているのか、ということの輪郭を描くことに本稿の目的を限定する。特に注目すべき点は、直観主義的な部分構造論理から古典的な部分構造論理間への埋め込みすべてが、直観主義論理から様相論理 **S4** への埋め込みとしてよく知られるゲーデル翻訳に酷似しているということである。Kanovich らの研究および今回得た結果によって、ゲーデル翻訳が部分構造論理という、より包括的な視点の中で、一般性を持った現象として理解される可能性が示唆されているのである。個別に部分構造論理の体系を考察するという段階を経た今、我々は次の問いに対してアプローチする：三層表現定理やゲーデル翻訳等の命題は部分構造論理という枠組みの中でどこまで一般化することができるのか。

2　部分構造論理間の相意味論的関係と埋め込み定理

[4] では既に、**ILL** から **LL** への翻訳とゲーデル翻訳の類似性が指摘されている。実際、ある固定された命題変数 p_0 に対して、$\&p_0$ を様相演算子 $\Box$ と見なすことで、それはゲーデル翻訳の定義とほぼ一致する [2]。

ここでは特に、次の二つの体系、アフィン論理（affine logic）と縮約的線形論理 (contractive linear logic) を例にとって、それらの相意味論的分析の、埋め込み定理の証明への応用を概観する。以下が **ILL** の始式および推論規則

である：

$$\frac{}{A \vdash A}\,init \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad A, \Delta \vdash \Pi}{\Gamma, \Delta \vdash \Pi}\,cut$$

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Pi}{A \otimes B, \Gamma \vdash \Pi}\otimes l \quad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}\otimes r \quad \frac{\Gamma \vdash A \qquad B, \Delta \vdash \Pi}{A \multimap B, \Gamma, \Delta \vdash \Pi}\multimap l$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}\multimap r \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\mathbf{1}, \Gamma \vdash \Delta}\,\mathbf{1}l \quad \frac{}{\vdash \mathbf{1}}\,\mathbf{1}r \quad \frac{}{\bot \vdash}\bot l \quad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \bot}\bot r$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \oplus B, \Gamma \vdash \Delta}\oplus l \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \oplus B}\oplus r_1 \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \oplus B}\oplus r_2$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \,\&\, B, \Gamma \vdash \Delta}\,\&l_1 \quad \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \,\&\, B, \Gamma \vdash \Delta}\,\&l_2 \quad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \,\&\, B}\,\&r$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\top r \quad \frac{}{\mathbf{0}, \Gamma \vdash \Delta}\,\mathbf{0}l$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{!A, \Gamma \vdash \Delta}\,!D \quad \frac{!\Gamma \vdash A}{!\Gamma \vdash !A}\,!r \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{!A, \Gamma \vdash \Delta}\,!W \quad \frac{!A, !A, \Gamma \vdash \Delta}{!A, \Gamma \vdash \Delta}\,!C$$

ここで、A, B は **ILL** の論理式を、Γ, Δ, Π は論理式の多重集合をそれぞれ表す。また、$\Gamma \equiv A_1, \ldots, A_n$ のとき、$!\Gamma \equiv !A_1, \ldots, !A_n$ を意味し、交換規則は省略して用いるものとする。直観主義アフィン論理 **IAL** は **ILL** に次の規則を認めることで定義される [3]。

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\,Wl$$

これとは対照的に、直観主義縮約的線形論理 **ILLC** は **ILL** に無制限の縮約を認めることで得られる。

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\,Cl$$

次に **IAL** と **ILLC** それぞれが、それに対応する古典的な体系といかなる関係にあるのかを、意味論的立場から見ていきたい。我々は次の二つの定理が成り立つことを確かめた：

定理 2.1 任意の直観主義アフィン相空間 $\mathscr{M}$ に対して、準古典アフィン相空間 $\mathscr{M}_q$ と古典相空間 $\mathscr{M}_c$ が存在し、次を満たす：

1. $\mathscr{M} \sqsubseteq \mathscr{M}_q \sqsubseteq \mathscr{M}_c$、
2. $\mathscr{M}_q$ から $\mathscr{M}$ への相同型写像 h が存在する。

定理 2.2 任意の直観主義縮約的相空間 $\mathscr{M}$ に対して、準古典縮約的相空間 $\mathscr{M}_q$ と古典縮約的相空間 $\mathscr{M}_c$ が存在し、次を満たす：

1. $\mathscr{M} \sqsubseteq \mathscr{M}_q \sqsubseteq \mathscr{M}_c$、
2. $\mathscr{M}_q$ から $\mathscr{M}$ への相同型写像 h が存在する。

ここで、$\mathscr{M}_1 \sqsubseteq \mathscr{M}_2$ は $\mathscr{M}_1$ が $\mathscr{M}_2$ の部分空間であることを意味し、写像 h が $\mathscr{M}_1$ から $\mathscr{M}_2$ への相同型写像であるとは、h が M_1 から M_2（M_1 と M_2 はそれぞれ $\mathscr{M}_1$ と $\mathscr{M}_2$ の台集合を指す）への全単射であって、相空間上の演算を保存する写像であることを意味する。上記二種類の定理に関してそれぞれ、1 は三つの空間が部分空間関係に関して三層構造 (three layered structure) をなしていることを示している。2 は直観主義相空間と、それに対して構成される準古典相空間が、相空間として同じ構造を持つことを示している。特に 2 によって、特定の準古典相モデルのクラスに対して、対応する体系が完全であることが帰結する。1 と 2 を合わせて、アフィン相空間、または縮約的相空間に関する三層表現定理 (three layered representation theorem) と呼ぶ。いま述べたように、次の結果を系として得る：

系 2.3 **IAL** の任意の論理式 A に対して、**IAL** で A が証明可能。$\Longleftrightarrow$ 任意の準古典アフィン相モデルにおいて、A は充足される。

系 2.4 **ILLC** の任意の論理式 A に対して、**ILLC** で A が証明可能。$\Longleftrightarrow$ 任意の準古典縮約的相モデルにおいて、A は充足される。

三層表現定理において特に注意すべき点は、アフィン相空間の三層構造が、通常の相空間や縮約的相空間の三層構造とは、完全に対応していないということである。それはアフィン相空間に対する三層表現定理において、古典相空間が一般にアフィンではないということから明らかである。上記の系のように、準古典相モデルのクラスに関する完全性定理の段階ではこの差異は問題とはならないものの、三層構造を使って我々が示した埋め込み定理においては、以下で示されるように対応関係に差異が生じる。線形論理の任意の論理式 A に対して、$A^\bullet$ を次のように帰納的に定める：

$$\begin{aligned}
p^\bullet &:= p \mathbin{\&} \mathbf{1} & (B \multimap C)^\bullet &:= (B^\bullet \multimap C^\bullet) \mathbin{\&} \mathbf{1}\\
(B \star C)^\bullet &:= B^\bullet \star C^\bullet \quad (\star \in \{\otimes, \&, \oplus\}) & (!B)^\bullet &:= !B^\bullet\\
\mathbf{1}^\bullet &:= \mathbf{1} & \bot^\bullet &:= \bot \mathbin{\&} \mathbf{1}\\
\top^\bullet &:= \top \mathbin{\&} \mathbf{1} & \mathbf{0}^\bullet &:= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

このとき次が成り立つ：

系 2.5 **IAL** の任意の論理式 A に対して、A が **IAL** で証明可能である。$\Longleftrightarrow$ $A^\bullet$ が **ILL** で証明可能である。$\Longleftrightarrow$ $A^\bullet$ が **LL** で証明可能である。

系 2.6 **ILLC** の任意の論理式 A に対して、A が **ILLC** で証明可能である。$\Longleftrightarrow \varphi(p_0) \multimap A^\circ$ が古典縮約的線形論理 **LLC** で証明可能である。ここで、p_0 はある固定された命題変数を示し、$\varphi(p_0) \equiv\, !p_0 \otimes\, !(p_0 \otimes p_0 \multimap p_0)$。

ここで A° とは [4] で定義されていた翻訳とまったく同じものを指す。したがって上記の系のうち二つめが、Kanovich-岡田-照井の埋め込み定理の、縮約的線形論理におけるカウンターパートになっている。ここで、$\varphi(p_0)$ の代わりに、$\psi(p_0) \equiv (p_0 \,\&\, \mathbf{1}) \otimes ((p_0 \otimes p_0 \multimap p_0) \,\&\, \mathbf{1})$ という論理式を用いることで、**ILLC** と **LLC** の乗法・加法的断片についての埋め込みを得る。すなわち、**ILLC** と **LLC** の乗法・加法的断片をそれぞれ、$\mathbf{FL_{ec}}$ および $\mathbf{GL_c}$ とすると、次の命題が成り立つ：

命題 2.7 $\mathbf{FL_{ec}}$ の任意の論理式 A に対して、A が $\mathbf{FL_{ec}}$ で証明可能である。$\Longleftrightarrow \psi(p_0) \multimap A^\circ$ が $\mathbf{GL_c}$ で証明可能である。

この命題の $\psi(p_0)$ に $\varphi(p_0)$ を代入した命題は成り立たない。なぜならば、様相演算子 ! は $\mathbf{GL_c}$ の乗法・加法的断片の言語には含まれていないためである。

次にアフィン論理に関する埋め込み定理の注意に入りたい [4]。第一に、系 2.5 では **IAL** から古典アフィン論理への埋め込みではなく、**IAL** から **LL** への埋め込みが主張されている。ここではその理由について考えたい。まず定理 2.1 を強めた次の命題 (†) が成り立つと仮定する。

(†) 任意の直観主義アフィン相空間 $\mathscr{M}$ に対して、準古典アフィン相空間 $\mathscr{M}_q$ と古典アフィン相空間 $\mathscr{M}_c$ が存在し、次の 1 と 2 を満たす：

1. $\mathscr{M} \sqsubseteq \mathscr{M}_q \sqsubseteq \mathscr{M}_c$、
2. $\mathscr{M}_q$ から $\mathscr{M}$ への相同型写像 h が存在する。

(†) と定理 2.1 の唯一の違いは、1 と 2 を満たすようなある古典相空間 $\mathscr{M}_c$ に対して、$\mathscr{M}_c$ がアフィンであるかどうかという点にある。系 2.5 と 2.6 は相空間の三層構造を反映した結果であるから、もし (†) が成り立つとすれば、**IAL** から古典アフィン論理への埋め込みが系として得られると考えるのは自然である。しかしここでは、(†) が一般には成り立たないことを示す。次の補題は簡単に示すことができる。

補題 2.8 $\mathscr{M}_c = (M_c, \perp)$ を古典相空間、$\mathscr{M} = (M, Cl)$ を $Cl(X) := X^{\perp\perp}$ であるような $\mathscr{M}_c$ の部分空間とする。（すなわち $\mathscr{M}$ は準古典相空間。）このとき、次の 1 と 2 は同値である：

1. $\mathscr{M}$ はアフィンである。

2. $\perp \cdot M \subseteq \perp$。

任意の古典相空間は準古典相空間であるから、上記の (†) が成り立つと仮定すると、補題 2.8 より $M_q = \perp^\perp = M_c$ が成り立つ。したがって、$\mathscr{M}_q$ と $\mathscr{M}_c$ は同じ相空間となる。しかしこのとき、2 によって **IAL** は古典アフィン相モデルに対して完全であることになり、矛盾する。したがって、定理 2.1 を強めた (†) は成り立たない。第二に、この埋め込み定理では **IAL** から **LL** のみならず、**IAL** から **ILL** への埋め込みが考えられている。この埋め込み関係に関しては、相意味論的な分析を経ずに、純粋に証明論的な議論によって示すことが可能である。しかしこの関係は、相空間上の関係としては明示的に現れていない。したがって相意味論的に本質的なのは、**IAL** から **LL** への埋め込みであると考えられる。

3 今後の展望

本稿では紙面の都合上、ここで紹介した定理に対して証明を与えることをしなかった。そこで第一の展望として、これらすべての定理に対して証明を与えた論文を完成させることを目標とする。またさらなる発展として、我々は部分構造論理におけるゲーデル翻訳の一般化の可能性を考えている。ある体系に対して成り立つ統語論上の性質を、より広い枠組みの中で捉えなおすという試みが近年盛んになってきており、そうした研究は部分構造論理において一層の発展を見せている。例えば照井 [10] がそのひとつである。そこでは個別の体系に対してカット除去の成否を検証するのではなく、部分構造論理においてカット除去が成立するための意味論的条件が考察されている。部分構造論理におけるこのようなひとつの趨勢のもとで、Kanovich らの挙げた結果や、それをもとに我々が示した結果を捉えなおすと、三層表現定理やそこから生じるいくつかの系が、部分構造論理においては、現在までに知られている以上に高い一般性を持っているという可能性が浮かび上がってくる。そして、個別的ないくつかの事例においてそれらを検証するという我々のこれまでの研究によって、三層表現定理や埋め込み定理をさらに一般化した形で述べるという試みが現実味を帯びてきている。興味深いことに、このような動機のもとで部分構造論理において埋め込み定理を拡張しようという研究が既に Galatos-小野 [2] によって行われている。そこではグリベンコの定理（二重否定翻訳）が代数的にどのような性質として特徴づけられるかが考察されており、[10] と同じく代数的手法が強力な役割を演じている。これらの先行研究を端緒として、部分構造論理においてゲーデル翻訳を一般化するという我々の試みは、代数モデルの考察によってこれまで以上に発展していくと考

えられる。

注

[1] 例えば岡田は直観主義相空間として次のような定義を提案した：M を可換モノイド、D を次の条件を満たす M 上の部分集合族とする。

1. D は任意の $\bigcap$ について閉じている。
2. 任意の $X \in \wp(M)$、$Y \in D$ に対して、$X \multimap Y \in D$。

このとき、任意の $X \in \wp(M)$ に対して、

$$Cl(X) := \bigcap\{Y \in D \mid X \subseteq Y\}。$$

直観主義相空間がこのような二階の (そして非可述的な) 定義によって特徴づけられるのに対して、Girard によって最初に与えられた古典相空間の閉包作用素は一階の定義により特徴づけられる：M を可換モノイド、$\bot$ を M 上の固定された集合とする。このとき任意の $X \in \wp(M)$ に対して、

$$Cl(X) := X^{\bot\bot}。$$

[2] ただし部分構造論理においては、直観主義論理や **S4** の場合と違って、結合子や定数に対して乗法的/加法的という区別がなされることに注意する必要がある。特に、**1** と $\top$、$\bot$ と **0** などの定数は、直観主義論理や **S4** では区別されていない一方で、**ILL** から **LL** への埋め込みにおいては、翻訳の定義がそれぞれ異なっている。

[3] 本稿では以下の規則

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}\, Wr$$

は考慮していない。また、$\bot$ が **IAL** の言語に含まれていない場合には、**IAL** のシーケントの右辺には常に論理式が一つ含まれるため、この規則は定義されない。

[4] ここでの議論は、部分空間、準古典相空間、アフィン相空間の定義を前提として行われる。部分空間および準古典相空間の定義については [4] を参照せよ。アフィン相空間の定義については [5, 8] を参照せよ。

文献

[1] V. M. Abrusci, Sequent calculus for intuitionistic linear propositional logic. *Mathematical Logic*, edited by P. P. Petkov, 1990, Plenum Press, 223–242.

[2] N. Galatos and H. Ono, Glivenko theorems for substructural logics over FL. *Journal of Symbolic Logic*, 71(4), 2006, 1353–1384.

[3] J. Y. Girard, Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50(1), 1987, 1–102.

[4] M. Kanovich, M. Okada and K. Terui, Intuitionistic phase semantics is almost classical. *Mathematical Structures in Computer Science*, 16(1), 2006, 67–86.

[5] Y. Lafont, The finite model property for various fragments of linear logic. *Journal of Symbolic Logic*, 62(4), 1997, 1202–1208.

[6] M. Okada, Phase semantics for higher order completeness, cut-elimination and normalization proofs. Special Issue on the Linear Logic 96, edited by J. Y. Girard, M. Okada, A. Scedrov, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 3, 1996.

[7] M. Okada, A uniform semantic proof for cut-elimination and completeness of various first and higher order logics. *Theoretical Computer Science*, 281, 2002, 471–498.

[8] M. Okada and K. Terui, The finite model property for various fragments of intuitionistic linear logic. *Journal of Symbolic Logic*, 64(2), 1999, 790–802.

[9] H. Schellinx, Some syntactical observations on linear logic. *Journal of Logic and Computation*, 1(4), 1991, 537–559.

[10] K. Terui, Which structural rules admit cut elimination? an algebraic criterion. *Journal of Symbolic Logic*, 72(3), 2007, 738–754.

（慶應義塾大学）