数列に関するパラドックスと『哲学探究』固有の数学観

鬼界　彰夫

筑波大学名誉教授

（１）『哲学探究』には固有の数学の哲学と呼びうるような考察は存在せず、後期ウィトゲンシュタインの数学観は主として『数学の基礎』で示されているという見解は、研究者の間で一定程度行き渡っているように思われる。この見解の最大の根拠は、いわゆる戦前版『探究』の後半を形成していた数学に関する諸考察（『数学の基礎』PartI）が現行の最終版『探究』では数節（§§189-197）を残すのみで、ほとんどが削除されているという事実である。このことは、現行『探究』において数学の哲学は最早主要なテーマではなくなったと我々に推測させるに十分である。他方、現行『探究』「序」においてウィトゲンシュタインは「数学の基礎」を、「意味」、「理解」、「文」、「論理」、「意識の諸状態」と並ぶ同書のテーマの一つとして挙げている。明らかにここにはある緊張が存在する。本発表は、i)現行の『探究』が固有の数学観を内包するような議論を含んでおり、ii)その議論とは数列に関するパラドックス（§§185-187）とそれに対する『探究』の解決（§§208-214）であると解釈できることを示すものである。加えて、iii)『探究』固有の数学観はブラウワーの数学観とある本質的な共通点を有することも示したい。

（２）クリプキの議論において数列のパラドックスは「＋」の意味を巡る問題に転換され、その上で意味概念を巡る根本的な懐疑論の一例と解釈されている。しかしながら、i)『探究』において意味の規則を巡る懐疑論の具体例は別に存在すること（§§84-88,138-141）、ii)数列のパラドックスが自然数列の無限性という、語の意味一般の問題に止まらない数学固有の問題にも関わっていると考えられることから、発表者は、このパラドックスが規則に関わる問題の一例として示されながらも、同時に数学における根本的な規則としての自然数列の生成原理（「後者関数 S(n)」）に関わる問題として提示されていると考える。発表者がこのように考えるもう一つの理由が、『探究』において規則を巡る問題に対する解答が与えていると考えられる箇所（§§198-242）に、規則一般ではなく、数学における根本規則と規則性に関わる考察（§§208-214,218-221）が存在し、それらは『探究』固有の数学観の表明と考えなければ適切に理解できない、ということである。　数列のパラドックスは数学における根本的な規則と規則性に関する重大な問題を提起し、その解決は『探究』規則論解決部の数学に関わる考察で与えられ、そこに『探究』固有の数学観と呼びうるものが示されている、というのが発表者の提起したい解釈である。より詳しく言えば、パラドックスが深刻な問題を引き起こすのは、そこで共有されている誤った前提のためであり、『探究』の解決は、その誤った前提を我々の数学実践の正当な土台に置き換えることに存しており、そこから『探究』固有の数学観が生まれ、それはある本質的な点においてブラウワーの数学観と一致する、というのが発表者の見解である。

（３）『探究』において数列のパラドックスは、0 に始まる様々な数列を構成する＜＋

ｎ＞という操作を教師が生徒に教えるという文脈で、生徒が＜＋２＞の実行において、訓練では扱わなかった大きな数について系統的に間違った答えを完全な確信を持って提示する、という事態として提示される（§185)。これがパラドックスと呼べるのは、生徒の明白な誤りの理由を教師が説明できないように見えるからである。仮に「与えられた数の次の次の数を書かないといけない」(§186) と説明しようとしても、今度は＜＋１＞について同じ事態が反復されるのである。これに対するクリプキの「懐疑的解決」は、正しさの根拠を共同体の大多数の成員の有限事例における反応との一致に求めるものだが、発表者には、それは解決ではなく依然パラドックスの一部であるように思われる。というのもそれは、共同体でこれまで使用されたことのない巨大数への＜＋１＞の適用において成員の反応が分裂する可能性、自然数概念の不定性という可能性を排除しないが、それは『探究』が数学に与えている特別な確実性（第二部§§330-350）と両立しないと思われるからだ。『探究』が与えているはずの解決は、「懐疑的解決」を含めたパラドックスにおいて暗に共有されている誤った前提の廃棄に基づいていると考えられる。その誤った前提とは、数に関する諸命題（数論的命題）は個々の計算者（数学的主体）から独立した何らかの事態に関するものであり、それらの正しさは計算者から独立した基準によって決まる、というものである。そうである限り、未経験の巨大数への＜＋１＞の適用に関して確信を持って誤答する計算者にその誤りの理由は説明できない。パラドックスの目的は、この誤った前提に立つ限り、数学的確実性という概念が脅かされることを示すことだと思われる。そしてパラドックスの解決部（特に§208）で間接的に示されているのが、数論的言明が数学的主体から独立した事態や対象に関するものではなく、数学的主体が共有する根本的な概念生成能力（＜＋１＞を無際限に適用し続ける能力）とそれによって生み出される概念に関わるものだという数学観だと考えられる。この能力は、有限の事例について共同体の成員と一致した反応をする能力ではなく、与えられた有限事例を超えて、どこまでも同じように＜＋１＞という操作を続ける能力であり、それに伴う、そのつど生み出されるものが常に違っている（常にｎ≠ｎ＋１）という認識である。これが我々の共有する自然数概念の根本であり、パラドックスの解決とは、生徒はまだ自然数概念を獲得しておらず、それゆえ数学的主体ではない、というものであると考えられる。この能力の特徴は、それを内容の確定した他の表現によって表せない、ということであり、我々は「０，１，２，３，・・・」などという表現を使わざるを得ず、しかもその内容を確定的には説明できない。§§208-211 はこうした事態を述べていると考えられる。ブラウワーも「・・・」等の根源性と還元不可能性について語っている（L.E.J.Brouwer、p.97)。パラドックスで前提されているものを「客体的数学観」、『探究』の解決が示しているのを「主体的数学観」と呼ぶなら、『探究』はブラウワーと、数学での直観の使用に批判的である点で相入れないが、主体的数学観という本質的特徴を共有していると言うことができる。数列のパラドックスは、あらゆる客体的数学観には深刻な問題が内包されていることを示していると考えられる。

・L.E.J.Brouwer, ‘On the foundations of mathematics’, in *L.E.J.Brouwer Collected Works I* (1975), pp.11-101.

・ソール A.クリプキ　『ウィトゲンシュタインのパラドックス』黒崎宏訳(1983)