Kleene再帰定理のモデル的考察

新井啓子
東京都立大学

Kleeneの再帰定理は計算可能性理論/再帰理論の基本定理であるが、一般に知られているものは、第二再帰定理と呼ばれるものである。第二再帰定理とは別に、汎関数を用いた第一再帰定理というものも存在する。本発表では、Kleeneのこの二つの再帰定理の考察を、ラムダ計算のモデルを用いて行う。この考察の狙いとするところは、計算可能性理論で用いられる帰納的関数と連続関数との関係性を明らかにすることにある。

まず、Kleeneの再帰定理及びその周辺の基本事項について確認しておく。この定理は計算可能性理論/再帰理論の基本定理である。先に、よく知られた第二再帰定理について述べると次のようになる。

【第二再帰定理】
任意の自然数領域上の計算可能な部分関数fに対して、自然数eで、$\phi_e(\mathrm{x})\simeq\phi_{f(e)}(\mathrm{x})$となるものが存在する。

ここで、ϕ_eとは、eでコード化されたプログラム（典型的にはチューリング機械）が計算する関数を意味し、≃は部分等号記号であり、定義域が同一であり値が存在する場合に、一致することを意味する。この定理の直観的意味は、与えられたコードgに対する変換としてfをみたときに、ある自然数eが(一般には無限個)存在して、eとf(e)が同じ関数をコード化しているということである。

第一再帰定理の内容は次のようになる。自然数上のすべての1変数部分関数の集合をPartiと書くことにすると、Parti上の全域汎関数Fが実効的に連続であるならば、その最小不動点 fが存在し、かつfは計算可能であるという内容である。G.A.Kavvos(Kav16)によると、第二再帰定理は、構文的性格もつ一階の定理であるが、第一再帰定理は、高階タイプの計算についての定理である。本発表では、第一再帰定理で問題となっている高階汎関数の概念と、その実効的連続性に着目し、これらの概念が計算可能性の概念とどのように関連するのかを、Kavvos が与えているよりも一層一般的な観点から、検討することを試みたい。このような関心から見たとき、高階汎関数、連続性の概念を取り扱うための有力な理論枠組みである、D.Scottによる領域理論を参照するのが適切であろう。領域理論では次のような定義が置かれる。

【定義1 (ω-cpo)】
$(D, \sqsubseteq)$を半順序とする。このとき、(1)$\sqsubseteq$についての最小要素$\perp\in D$が存在し、(2)Dの要素からなる任意のω列の上限がDの要素のうちに存在するならば、$(D, \sqsubseteq)$をω-cpoと呼ぶ。

【定義2 (連続関数)】
D、Eをω-cpoとし、F: $D\to E$とする。Fが連続であるとは、Fは順序と上限を保存することを意味する。すなわち、

$$\mathrm{x}\sqsubseteq_D \mathrm{y} \Rightarrow \mathrm{F(x)}\sqsubseteq_E \mathrm{F(y)} \quad \text{かつ} \quad \mathrm{F}(\sqcup_D\{x_i\colon \mathrm{i}\in\mathrm{N}\})=\sqcup_E\{\mathrm{F}(x_i) : \mathrm{i}\in\mathrm{N}\}$$

【不動点定理】

Dをω-cpoとし、F: $D \to D$を連続関数とする。このとき、Fの最小不動点がDに存在する。

Kleeneでは、実効的連続性が登場しており、領域理論では、連続性一般が取り扱われているなど、両者の関係については、更に考察すべき点が多い。そうした点を含めて、論理学的なポイントを明らかにしたうえで、Kleeneの再帰定理の哲学的意義を考えてみたい。とりわけ、計算可能性理論で用いられている計算概念の意味を明らかにすることを通して数学の哲学の内容を深めると同時に、第二再帰定理と第一再帰定理との間にみられる、計算可能性理論に基づいた一階と高階の計算言語の意味論的差異に着目することになっているという点を取り挙げたい。

参考文献

G.A. Kavvos. Kleene’s two kinds of recursion, arXiv: 1602.06220v.1 [cs.LO], Feb. 2016.