シンポジウム《数学を巡る思索》講演要旨

本シンポジウムの企画趣旨　――司会者の私見として――

司会者　岡本賢吾

日本科学哲学会の大会で、数学の哲学に関するシンポジウムが行われるのは、第 39 回大会（2006 年）の「現代数学の論理的・哲学的基底」以来のことである。この 39 回大会のシンポジウムの企画趣旨は、おおよそ次のようなものだった。(1) 数学基礎論の現代的な展開形態の代表例として、近年ますます盛んに研究されるようになった「逆数学」と、その構成主義ヴァージョンである「構成主義逆数学」という二つを取り上げ、これら二つが具現している概念上・方法論上の革新性を明らかにする。(2) これを踏まえて、両者の歴史的・哲学的な背景ないし源流であるフレーゲからブラウワー、ヒルベルト、さらにゲーデルへの流れについても、従来の認識論オリエンテッドな設問（数学的理論の真理性はいかにして基礎付け可能か）、存在論オリエンテッドな設問（数学的理論はどのような抽象的存在物の実在にコミットしているのか）とは異なった、新しいタイプの問題設定（大まかに言って「意味理論」的な問い、つまり、数学的命題の意味とは何か、それを明示化するためにはいかなる概念と技術的道具立てを用意する必要があるか）を介してアプローチすることを試みる。(3) そこからさらに、今後の数学基礎論並びに数学の哲学のあるべき方向性を考究・構想する。

この趣旨がどこまで実現できたかは措くとして、以上のように、前回の企画は、フレーゲからブラウワー、ヒルベルト、ゲーデルまでの、文字通り、古典的な意味合いでの「数学基礎論」の展開をその基本的主題とし、これを（理論的・技術的側面と、哲学的側面の双方にわたって）現代の観点からどう捉え直すか、ということが関心の中心に置かれていた。今回のシンポジウムは、（さしあたって、ただの私見にすぎないが）これを二つの面で拡張・進化させようとするものである。

［１］　考察対象を、近世から現代までの数学の歴史的発展全般へと拡張する。すなわち、まず竹内氏の提題は、もちろん現代的述語論理の道具立て（変項束縛のメカニズム）を駆使するものではあるが、基本的には、独立変数と従属変数という考えに代表される（インフォーマルな）数学、とりわけデカルト、ニュートン、ライプニッツ以来の近代的解析幾何が、どのような自明でない論理的構造を含んでいるかを解明（明示化）しようとするものである。他方、野本氏の提題は、

それに続く大きな画期、つまり、現代的な数学的構造主義と公理主義の祖と見なしうるデデキントのアイデアを、近年の綿密な文献学の成果に基づいて精確に再構成することを主題とする。さらに菊池氏は、ヒルベルトからゲーデルに至る数学基礎論の展開を基本的対象としながら（この意味で、氏の提題は、前回の企画の継承的発展でもある）、しかしこれまで十分に問われてこなかった（不完全性定理研究の最新の成果を踏まえることで近年ようやく可能になった）観点、すなわち、数学を形式化するとは結局のところいかなることなのか、という問いの観点から考察する。最後に、蓮尾氏は、文字通り、現代数学の最新の展開に属する圏論、中でも最も先端的な余代数を主題として、その方法論的意義の核心を解説する。――このように単に列挙すると、話が拡散しすぎるように思われるかもしれないが（実際、そうならないように図るのが司会の仕事であろうと認識している次第であるが）、次の［２］を参照して頂ければ、必ずしもそうではないことが理解されるであろう。

［２］　数学理論の分析手法自体の革新が様々に生じていることを明らかにし、この事実をできるだけ尊重した数学の哲学を構想する。従来、数学理論の分析ということで（特に数学の哲学の分野で）念頭に置かれてきたのは、典型的には、フレーゲやラッセル・ホワイトヘッドの仕事のような（何らかの高階述語論理の体系を用いた）数学理論の論理的再構成、あるいはまた、公理的集合論の体系を用いた数学の形式化、といったものであった。しかしこれはまありにも制限された見方である。例えば、竹内氏は、変項束縛のメカニズムそれ自体が、インフォーマルな数学の理論構造について多くの non-trivial な明示化を行いうることを指摘している。また菊池氏は、例えば不完全性定理の証明に登場する可証性述語の論理的特性を明らかにすることが、証明と何かに関する我々の理解を明示化し、あるいは拡張・深化させうることを明らかにしている。さらに、蓮尾氏は、上でも触れた通り、圏論という抽象化の極みとも言いうる手法が、この理論なしではありえない数学的な応用を持ち、従って同時に、圏論によって初めて明示化可能となった数学の理論的構造が実在するであろうことを示唆している。――このように、数学理論についての刷新的で有効な分岐方法が現在も次々と提起されつつあること、このことを踏まえて今後の数学の哲学の方向と可能性を考察することが、本シンポジウムの中心的目的であると（あくまで私見ではあるが）言ってよかろうと思われる。

数学と変数

提題者　竹内泉

１ 動機と目標

数学の証明は述語論理によって完全に記述出来る。この述語論理による記述は符号化と言い得る。そして述語論理には自由変数と束縛変数が登場する。変数はその二種類しか登場しない。

しかし、述語論理によって符号化される前の数学の記述には、自由変数と束縛変数しか登場しない訳ではない。数学には、様々な変数が登場する。

変数の使用は数学の言語に特有である。変数の使用を辿ることによって、数学の言語の特徴の一端が明らかになると期待される。

本発表は、数学の言語哲学として、数学に於ける変数の使用を分析する。分析の道具には述語論理を用いる。

２ 変数の分類

変数の使用は以下のように分類出来る。

- ・恒等式の中の文字
- ・方程式の中の未知数
- ・方程式論の中の変数
- ・座標変数と確率変数
- ・独立変数と従属変数
- ・自由変数と束縛変数

文献※にはこの内の幾つかが論じられている。本発表ではそれらを整理する。

※竹内泉「数学と論理学」『現代思想』35 巻 3 号 180～185 頁、2007 年
竹内泉「数学と変数」『哲学誌』54 巻 37～48 頁、2012 年

３ 各分類の概説

恒等式の中の文字は数学で一番一般的な使用法である。これは述語論理で符号化された場合には自由変数となるが、数学の文の中では単に《文字》と呼ばれる。数学では文字は、ある一定の範囲で区切られてその範囲で全称量化される。

方程式の中の未知数は、方程式とその解とを同値記号で結んだ論理式に於いて、その未知数が全称量化させる。

方程式論の中の変数は、係数環に対する超越元であるが、またその一方で《何でも代入できる》という性質を持つ。この点で全称量化された変数と同様である。

座標変数と確率変数は、変数と言いつつ、ある定義域からある値域への函数である。

独立変数と従属変数、及び自由変数と束縛変数は、未だ分析が尽されていない。独立変数と従属変数の解釈には時間が必然的なものとなるであろう。

デデキントの数論要旨
「デデキント数論における「創造」とは何か？ーその実質と方法」

提題者　野本和幸

[方法] (A) 生成的方法と (B) 公理体系化の方法との相補的でダイナミックな展開

[創造] 直観的な数学の「抽象化」による「数の理論」での「抽象型」との対応

(1) (A)「生成的」方法は、いわば「保存的拡大」という方法で、既に「教授資格請求講演」[1854] での、新関数/操作の導入による数領域拡張に関する研究プログラムの提示（「生成原理」（旧領域での演算法則を保存しつつ新数領域を拡大する））に見られる。

(2)『無理数論』[1872] での数の「創造 erschaffen」とは？

→ ① 有理切断 Schnitt (A1,A2) との「対応 Correspondenz/entsprechen」: 逆にどの確定した切断にも、一意の有理数ないし無理数が対応する。

→ ② 連続性概念と極限値存在定理との同値性定理（逆数学的な最初の定理 [Sieg]）

(3) 手稿 [1872/78] in Dugac(1976)([1888] 論文の初稿) : 自然数からの０、負の整数、有理数の創造、また自然数自体の生成・創造に関する遺稿ーー (3a) 概要 (i) 後者関数 ϕ を新数領域生成の基本操作; (ii) 整数・有理数領域の生成・創造→ [(B) 公理化の方法] 新領域の公理的特徴づけ、自然数モデルの定義、デデキント-ペアノ公理群の最初の定式化が含まれる。

(3b) 数領域の拡張 (A) とその公理的構成 (B) : 逆演算は、基本演算則を保存する整数・有理数領域の生成を要するが、「創造行為 Schöpfungsakt」は、「加法の再帰的定義と、加法・乗法の基本法則の完全帰納法による証明」で足りる。+1 は後者関数 ϕ に抽象され、自然数列は $1, \phi(1) = 2, \phi(2) = 3, \phi(3) = 4, \cdots$ と表記、加法は、$a + \phi(b) = \phi(a + b)$ と $a + 1 = \phi(a)$ によって再帰的に定義される。

(3c) 任意の自然数 a に、$a + 0 = a$ の元 0 と、$a + a* = 0$ の元 a^* の負数 $1^*, 2^*, 3^*, \cdots$ とが付加され、後者操作も $\phi(0) = 1, \phi(1^*) = 0, \phi(2^*) = 1^*, \phi(3^*) = 2^*$ 等と設定され、新しい整数系 G が創造 erschaffen される。(3d) 有理数系 R は、自然数 m, n のペア (m, n) と (m', n') から構成される。ペア上の加法、乗法を定

義し、結合律、交換律、分配律が保存される。

(4)『自然数論』[1888] 自然数列 N の公理体系化－方法 (B)

自然数の自由な創造 freie Schöpfung とは、その特殊算術的性格の剥離 Entkleidung/抽象 Abstraktion による「抽象型 abstrakter Typus」との「対応 Correspondenz, Entsprechen」である。

A. [分析 Analyse] ① 基本概念:系 System, 基本要素の最小系 1、写像 Abbildung ϕ、連鎖 Kette、無限、単純 einfach 無限の定義。すなわち、

(a) S が ϕ-連鎖ならば、S は ϕ の下での閉包 [$(\phi(S) \subseteq S)$] 。(b) 無限系[$U(S)$]: $\phi(S)$ が S の真部分系 [$\phi(S) \subset S$]。各 S は自身と合同 [順序同型 isomorphisch [$x \leq y \leftrightarrow \phi(x) \leq \phi(y)$] (カテゴリカル) なすべての無限系の「類」[同値類] を構成。(c) S が 単純無限系[$EUS(S)$]:最小数 系 $\{1\}$ を含む無限系 ($\phi(S)$ が S の真部分系) で、最小数系 $\{1\}$ は S には含まれるが、$\phi(S)$ には 含まれない [$\{1\} \not\subset \phi(S) \subset S$]。「抽象型」: $< \{1\}, \phi, \{1\} \not\subset \phi(S) \subset S >$

B. [綜合 Synthese]①（最小数系 1 をふくむ連鎖で、順序同型な同値類である単純無限系の「抽象型」$< \{1\}, \phi, \{1\} \not\subset \phi(S) \subset S >$ に関わる「数の理論 Wissenschaft der Zahlen」を、「完全帰納法」に依拠する諸定理証明により、公理的に構成。単純無限概念の無矛盾性を、メタ的モデル $<$ {Ich}、私の思考世界 Gedankenwelt [私の思考対象となりうるもの g の全体] G、思考する ϕ_d、$\phi_d(G) \subset G >$ の存在によって証明する。(思考主体の私は私の思考対象 g ではない {Ich} $\not\subset \phi_d(G)$)

② 単純無限数列 [$EUS(N)$] の公理的構成:「N は、写像 ϕ と最小数 1 の存在により、次の公理的 4 条件を満足する。(α) $\phi(N)$ は N の ϕ-部分系 [$\phi(N) \subseteq N$]、(β) N は最小数系 $\{1\}$ の連鎖 $\{1\}_0[N = 1_0]$、(γ) $\{1\}$ は ϕ-連鎖に含まれない [$\{1\} \not\subset \phi(N)$]、($\delta$) ϕ は相似・単射写像。よって N は単純無限系。」（71 項）故に N は、要素 1 が属する（S 中の）すべての連鎖の共通部分（Gemeinheit) 1_0 で、(α)-(δ) がデデキント・ペアノ公理系を構成する（逆数学的アプローチの先駆)。

以上、 デデキントの基礎論的構想には、 初期からの 「生成的」 アプローチ (Ferreiros[1999]) と相補的に、 斬新な「公理論的」アプローチが認められる。(Sieg[2013])

だが何故、デデキントは、N が最小数系の「連鎖」性 $\{1\}_0[N = 1_0]$ を要求するのか？問題は、すべての単純無限系同士の合同・順序同型性（カテゴリ性）を破る、「異質な侵入者 fremder Eindringling」[超準的要素 [Sieg]] の排除と「最小性 minimality」に関わる。(H. Keferstein 宛書簡 [2.27,1890]in Sinaceur[1974])

形式的数学と非形式的数学

提題者　菊池誠

述語論理は数学的証明を形式的に記述するための枠組みである．一般に，述語論理における形式的証明の概念は完全性定理によって正当化されており，述語論理の上で展開される集合論や 2 階算術などを用いれば，数学的証明は原理的に形式的証明に書き直せると信じられている．集合論や 2 階算術を用いて形式的に記述された数学を形式的数学，数学者が実践する生身の数学を非形式的数学と呼ぶことにする．数学的証明は原理的に形式的証明に書き直せるという信念は，形式的数学と非形式的数学は同一視できるという数学観に他ならない．100 年前の論争を振り返るまでもなく，哲学者や論理学者は決して形式的数学と非形式的数学を簡単に同一視している訳ではないが，例えば不完全性定理がどのように理解されているかを振り返ってみれば，実際にはこの同一視はかなり深く浸透していることが分かる．

しかし，数学者が述語論理を用いて証明を形式的に記述しながら定理を証明することは滅多になく，明確な反論はしなくても心情的には数学者は形式的数学と非形式的数学の同一視を受け入れてはいない．非形式的数学が何であるのかは数学的な定義を持たないので，形式的数学と非形式的数学を同一視することは具体的な根拠を提示することが難しい信念の表明に過ぎないが，それと同時に，その同一視を反論することも容易ではない．しかし，もしも形式的数学と非形式的数学を同一視することができないのなら不完全性定理の意味は大きく変化するし，100 年前の数学の基礎をめぐる論争の結末の解釈も標準的な理解とは異なるものにならざるを得ない．形式的数学と非形式的数学の同一視を疑うことは不完全性定理が実際には何を証明した定理であり，我々は数学をどのように理解しているのかを知るためには大変に興味深く，重要な課題であるように思われる．

ただし，もしも形式的数学と非形式的数学を同一視することができないとしても，そのことは形式的数学の存在意義を失わせるものではない．この同一視が可能であるとなかろうと 20 世紀の数学もしくは数学的な議論において形式的数学が果たしてきた役割は大きい．形式的数学と非形式的数学の同一視を疑うことはむしろ，20 世紀に形式的数学が果たしてきた役割を明確にすることに寄与するものであろう．そこで，形式的数学と非形式的数学の関係について，もしもこれらを同一視することができないのだとしたら，形式的数学とは何でありこれまでどのような役割を果たしてきたのか，形式的証明とは何であって数学的証明とどの

ような関係にあるのか，不完全性定理の解釈や数学の基礎をめぐる論争に対する見方は標準的なものからどのようなものに変化し得るのかについて考えてみたい．

数学の方法としての圏論： 計算機科学への応用の現場から

提題者　蓮尾一郎

もともと代数学と幾何学に共通する数学的構造を記述するために生み出された圏論は，現代数学のほとんどの分野で便利な「コトバ」として用いられる．圏論とは，ごく大ざっぱに言うと，同じく構造記述のための言語の先達たる代数学の「多対象版」である——言い替えると，代数学は圏論の「一対象」の特殊ケース，となる．しかしこの単純な拡張は（広い意味での）「作用」「操作」のモデリングを可能にし，今や圏論は数学のみならず計算機科学をはじめとするさまざまな分野で利用されている．

計算機科学の研究に現れる圏論の応用のされ方には，相異なる大きな潮流が３～４つほど存在する．本発表ではその中の一つ，提題者が研究を行う余代数 coalgebra とよばれるアプローチについて紹介する．キーとなる定義および定理をかいつまんで紹介するが，そこでのポイントは： 1) 圏論の抽象力による本質的な構造の抽出（すなわち「数学的本質を見極める」こと）； および 2) このようにして得られた一般理論を経由した「理論の移転」である．より具体的には，余代数という圏論的概念を動的システムのモデルとして用いて，動的システムの性質を証明すること——たとえば，計算機システムが仕様通り動作するか証明（検証）すること——が提題者の研究の目的ということになるが，ここで上記のポイント 2) を活用することにより「証明手法の移転」が可能になる．すなわち，応用上の例で言うと，非決定的な分岐のあるシステムに対する検証手法から，確率的システムや量子的システムに対するそれが直ちに得られる，ということがおきる．

提題者は理論計算機科学における圏論の一ユーザーに過ぎず，数学や圏論そのものに対する深い思索について語れる者ではない．しかしながら，現代数学の抽象志向の権化とも言える圏論の，計算機科学ひいてはソフトウェア工学への応用の現場からの実況中継を通して，数学における圏論の役割や，さらには数学と応用の関係について，議論の契機を提供することができれば何よりの幸いである．