科学哲学会2012年大会ワークショップ

余帰納法と論理学

秋吉亮太、佐野勝彦、矢田部俊介

2012年11月11日

@宮崎大学教育文化学部

shunsuke.yatabe@aist.go.jp

要約

- 計算機科学で「余帰納法」という構成法が広く使われる
- 余帰納法は強力だが解釈に困る
  - 証明力が弱い体系で潜在的に無限な対象を記述可能
  - 部分に先立ち全体が存在することを仮定している
- 数学の哲学の立場から余帰納法をどう解釈するべきかを検討するための第一歩として、余帰納法が論理学において使われている現場からの報告を行う

メニュー

- 入門的解説（矢田部）（30分）
- ビット列を捉える無限様相論理（佐野）（30分）
- 余帰納法の証明論への応用（秋吉）（30分）
- 討論・質疑応答

入門的解説

矢田部俊介

入門的解説メニュー

- 帰納法とは何か
- 余帰納法とは何か
- 例：フラクタル図形
- どこが哲学か？

帰納法とは何か

帰納的定義と余帰納的定義

- 帰納的構成：ボトムアップ
  - 最初のケース（initial case）
  - 後続者ケース
- 余帰納的構成：トップダウン
  - 後続者ケースのみ

帰納的構成の例

- 有限リストの定義：任意の集合Aに対し、Aのリスト$A^{<\omega}$を以下のように定義する
  - 最初のケース：〈〉は$A^{<\omega}$の元
  - 後続者ケース：$a=\langle a_0,\ldots,a_n\rangle$が$A^{<\omega}$の元ならば、任意のAの元bについて $\eta(a,b)=\langle b, a_0,\ldots,a_n\rangle$が$A^{<\omega}$の元
  - 以上の仕方のみで構成されたのが$A^{<\omega}$の元
- 帰納的定義はηの最小不動点を与える

余帰納法とは何か

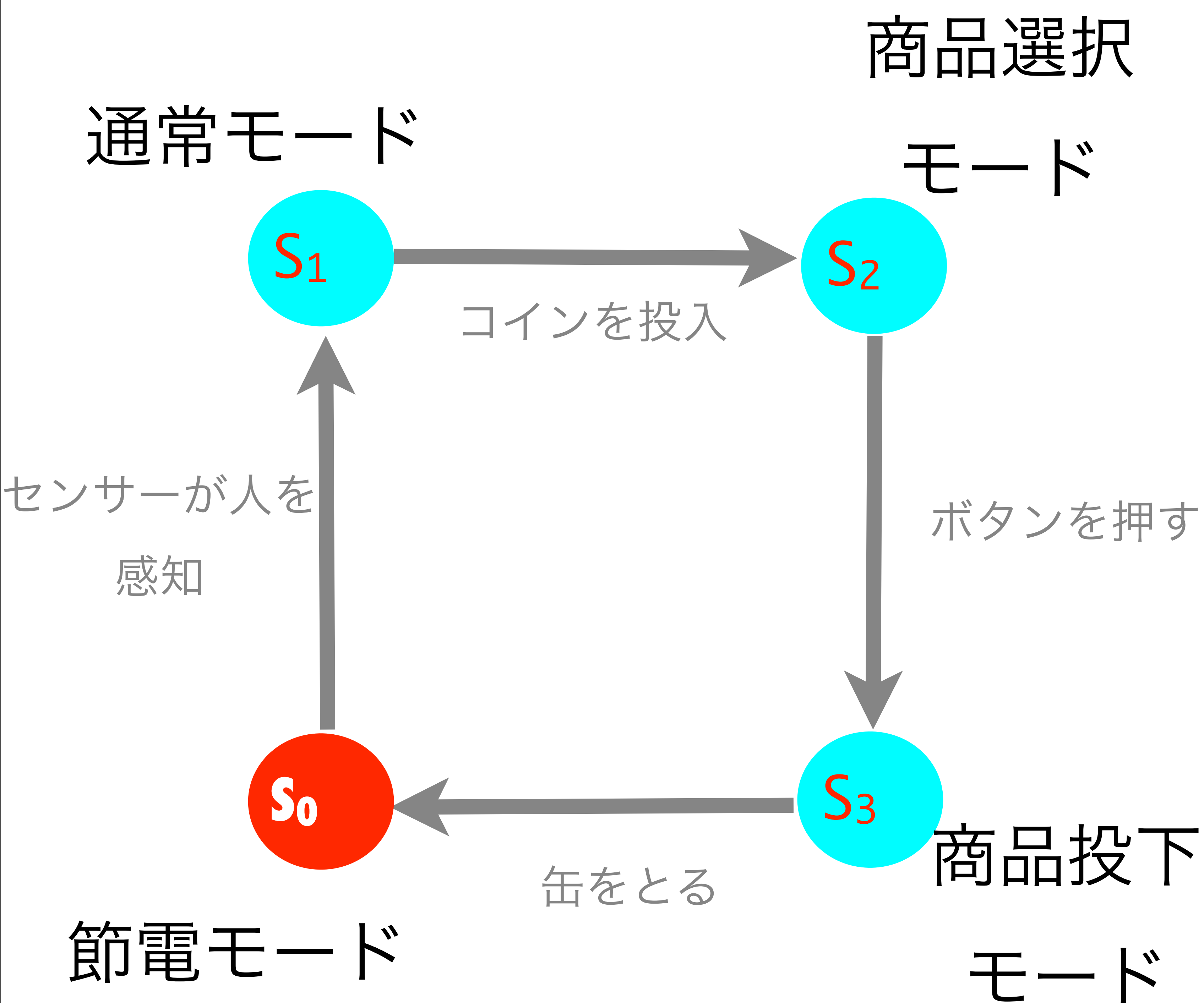
余帰納的構成

余帰納法

- 「最初のケース」が存在しない
- 無限後退

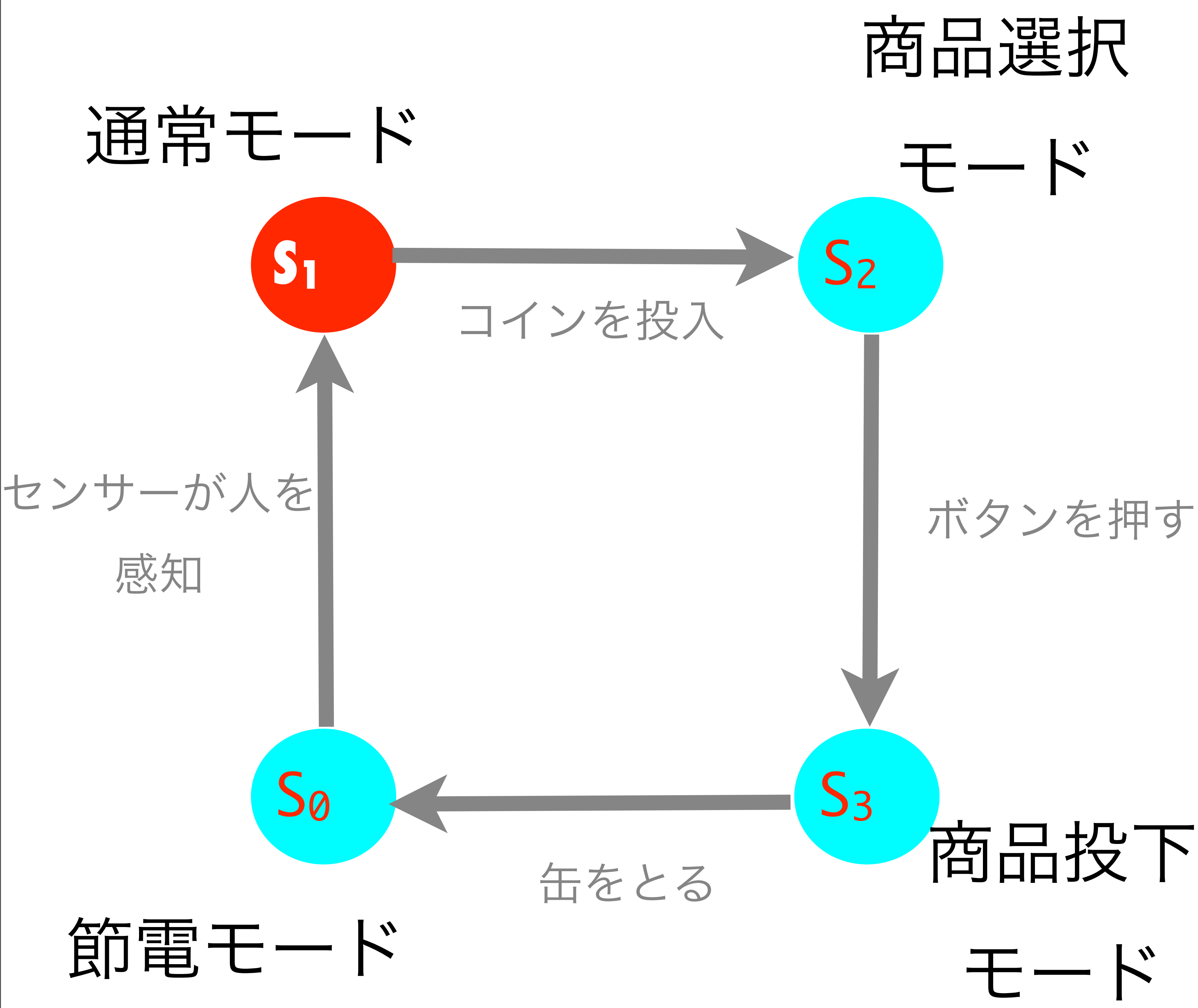
- "Zitra Pivo Zdarma" in NACHOD, in North Bohemia

余帰納的対象


通常モード
S_1
商品選択
モード
S_2
コインを投入
センサーが人を
感知
ボタンを押す
S_0
S_3
商品投下
モード
缶をとる
節電モード


Coca-Cola
Coca-Cola

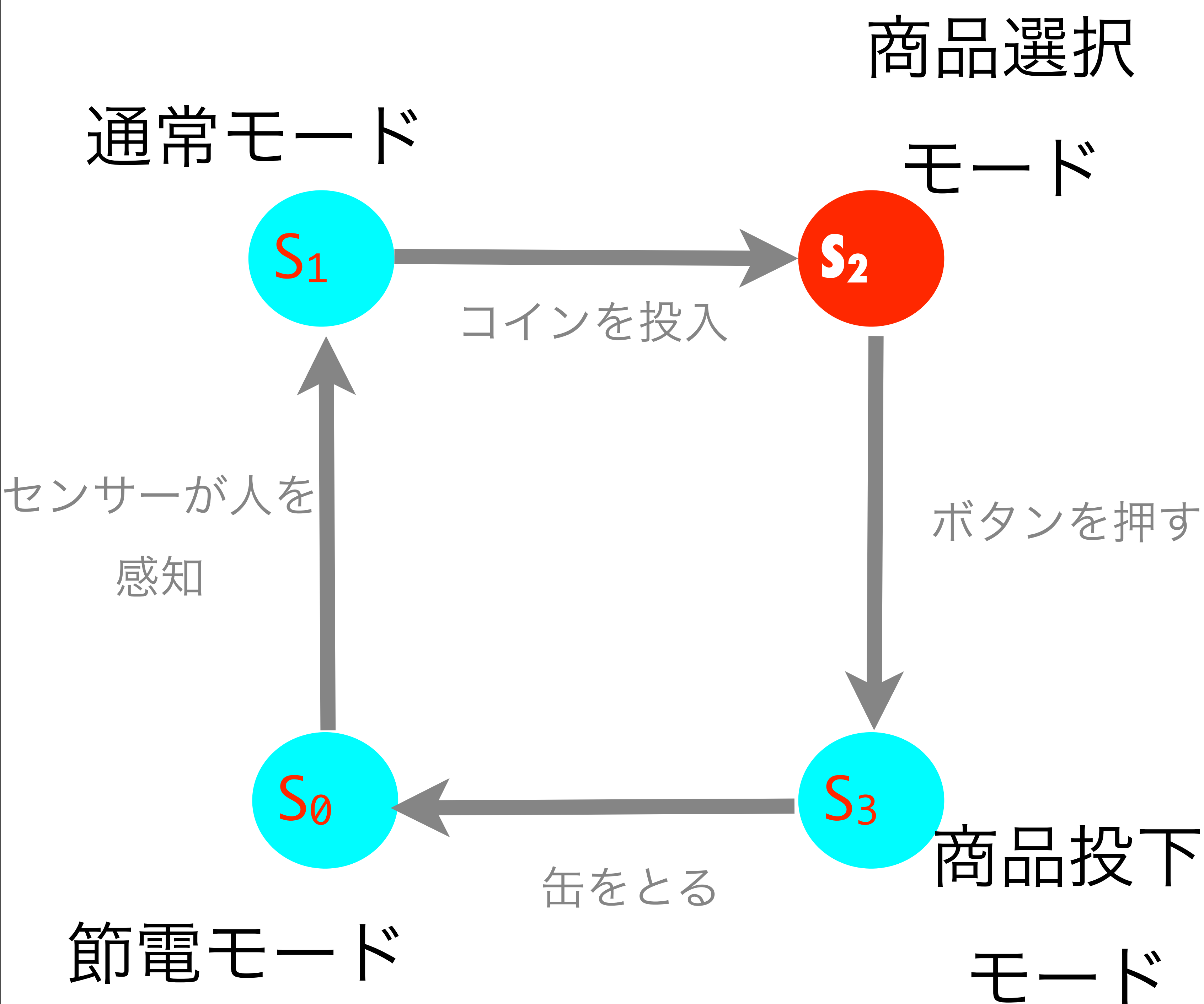
余帰納的対象



商品選択
モード
通常モード
S1
S2
コインを投入
センサーが人を
感知
ボタンを押す
S0
S3
缶をとる
節電モード
商品投下
モード

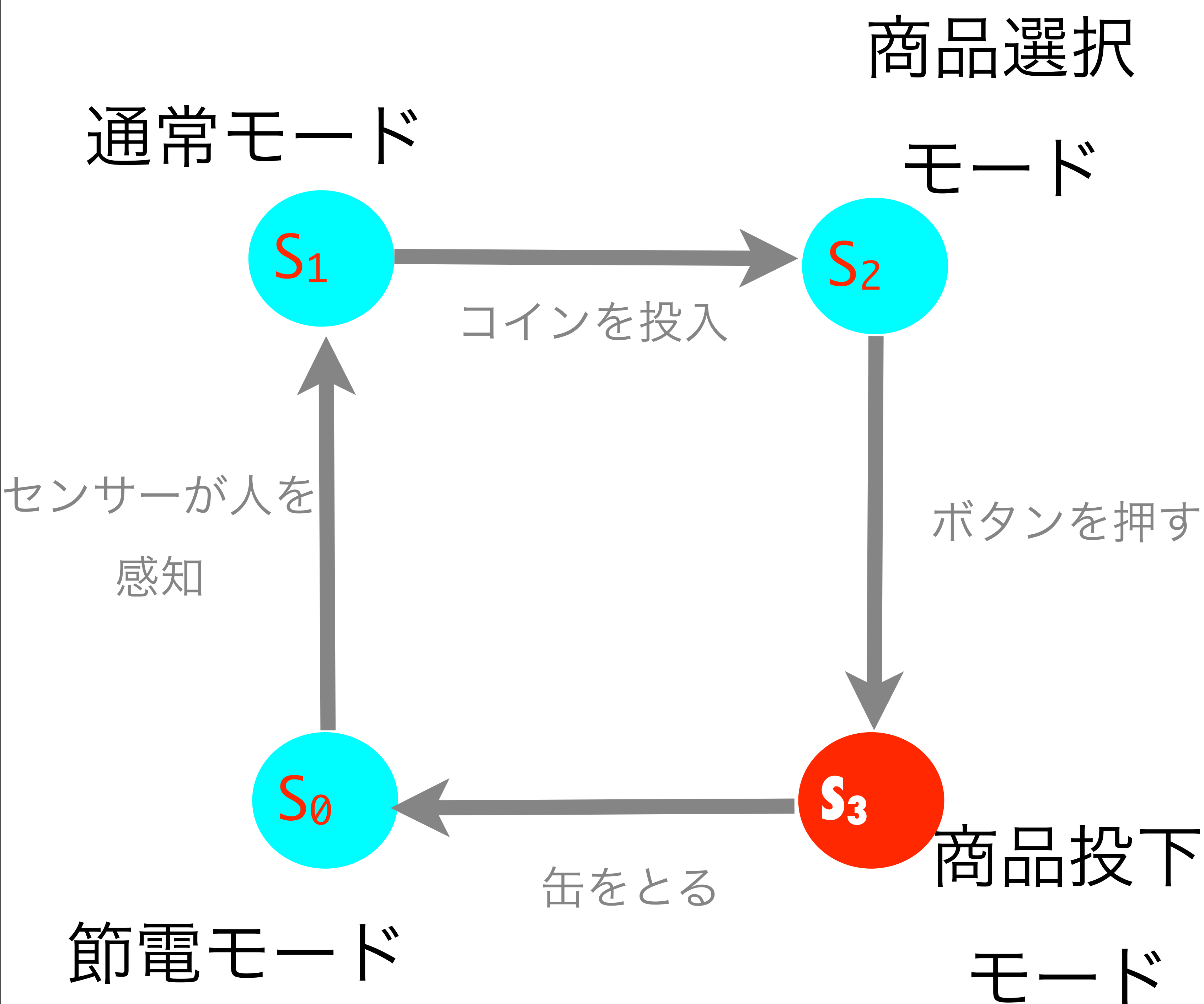
Coca-Cola
Coca-Cola

余帰納的対象



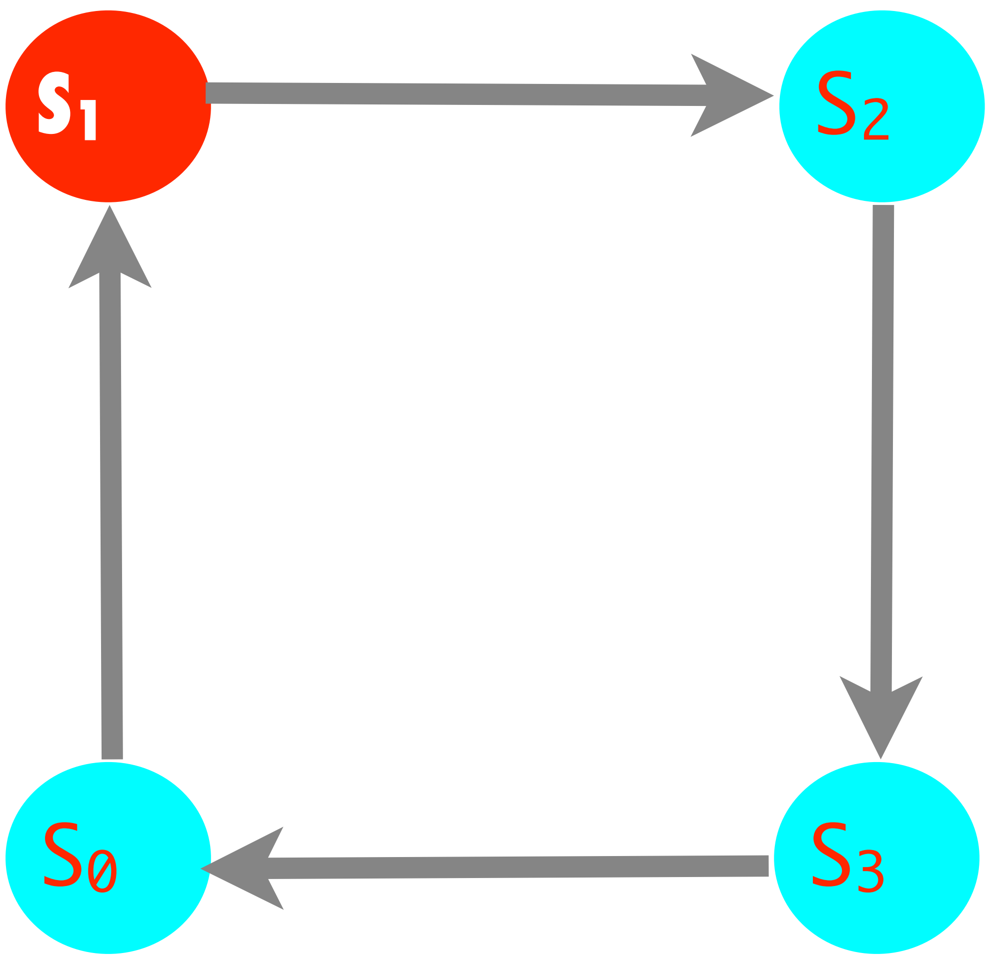
商品選択
モード
通常モード
S1
S2
コインを投入
センサーが人を
感知
ボタンを押す
S0
S3
缶をとる
商品投下
モード
節電モード

余帰納的対象



商品選択
モード
通常モード
S1
S2
コインを投入
センサーが人を
感知
ボタンを押す
S0
S3
商品投下
モード
缶をとる
節電モード

余帰納的対象



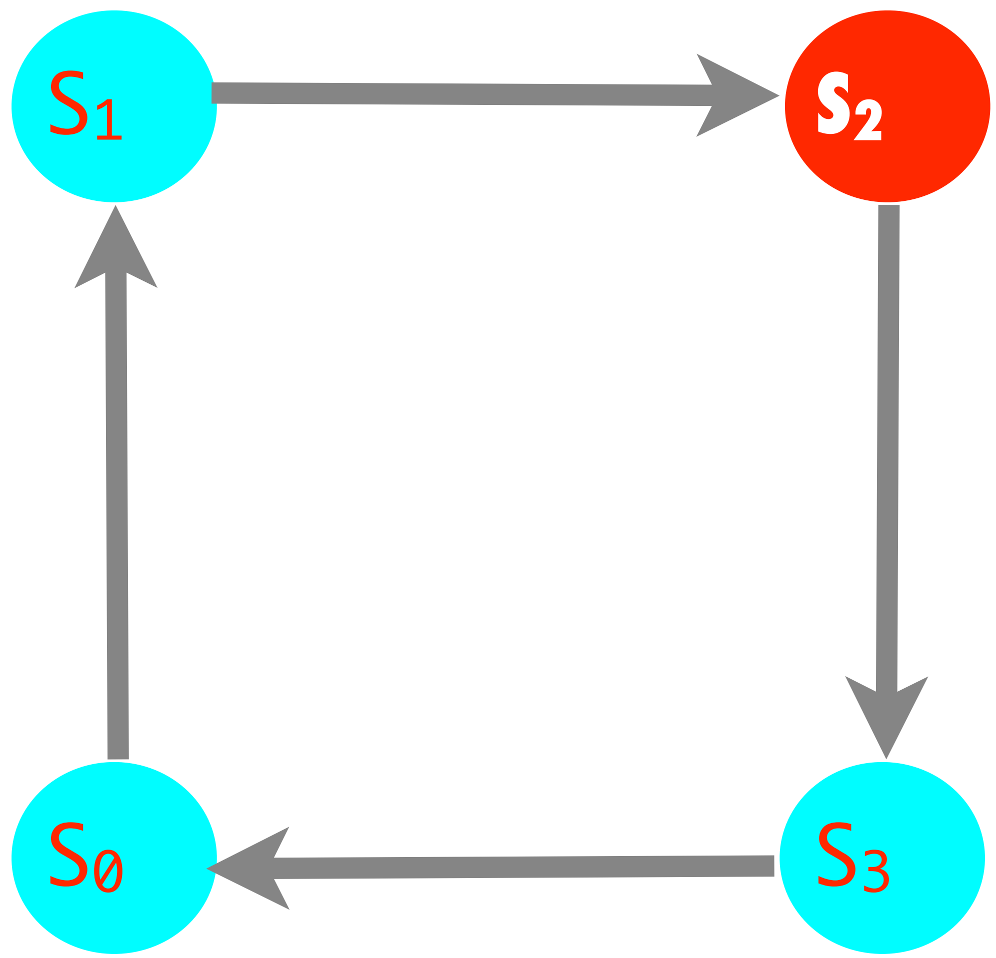
(S1, S0, S3, S2, …)

余帰納的対象の例

停止しない
オートマトンの
動作ログ
（無限ストリーム）

動作ログは無限列

余帰納的対象



$(S_1, S_0, S_3, S_2, \ldots)$

$(S_2, S_1, S_0, S_3, S_2, \ldots)$

余帰納的対象の例

停止しない
オートマトンの
動作ログ
（無限ストリーム）

既存の無限列に有限的操作を加えた結果

余帰納的構成の例

- 無限リスト（ストリーム）の定義：任意の集合Aに対し、AのリストA$^\infty$を以下のように定義する
  - 最初のケース：？はA$^\infty$の元
  - 後続者ケース：$a = \langle a_0, a_1 \ldots, \rangle$ がA$^\infty$の元ならば、$\gamma(a) = \langle a_1, \ldots, \rangle$ がA$^\infty$の元（a_0 はAの元）
  - 以上の仕方のみで構成されたのがA$^\infty$の元
- 余帰納的定義はγの最大不動点を与える

余帰納的構成の例

- 無限リスト（ストリーム）の定義：任意の集合Aに対し、AのリストA$^\infty$を以下のように定義する
  - ~~最初のケース：？はA$^\infty$の元~~
  - 後続者ケース：a= 〈a_0, a_1…,〉がA$^\infty$の元ならば、γ(a)= 〈a_1,…,〉がA$^\infty$の元（a_0 はAの元）
  - 以上の仕方のみで構成されたのがA$^\infty$の元
- 余帰納的定義はγの最大不動点を与える

余帰納的構成の例

- 無限リスト（ストリーム）の定義：任意の集合Aに対し、AのリストA$^\infty$を以下のように定義する
  - ~~最初のケース：〈〉はA$^\infty$の元~~
  - 後続者ケース：a=〈a_0, a_1…,〉がA$^\infty$の元ならば、γ(a)=〈a_1,…,〉がA$^\infty$の元（a_0 はAの元）
  - 以上の仕方のみで構成されたのがA
- 余帰納的定義はγの最大不動点を与える

一種の無限後退

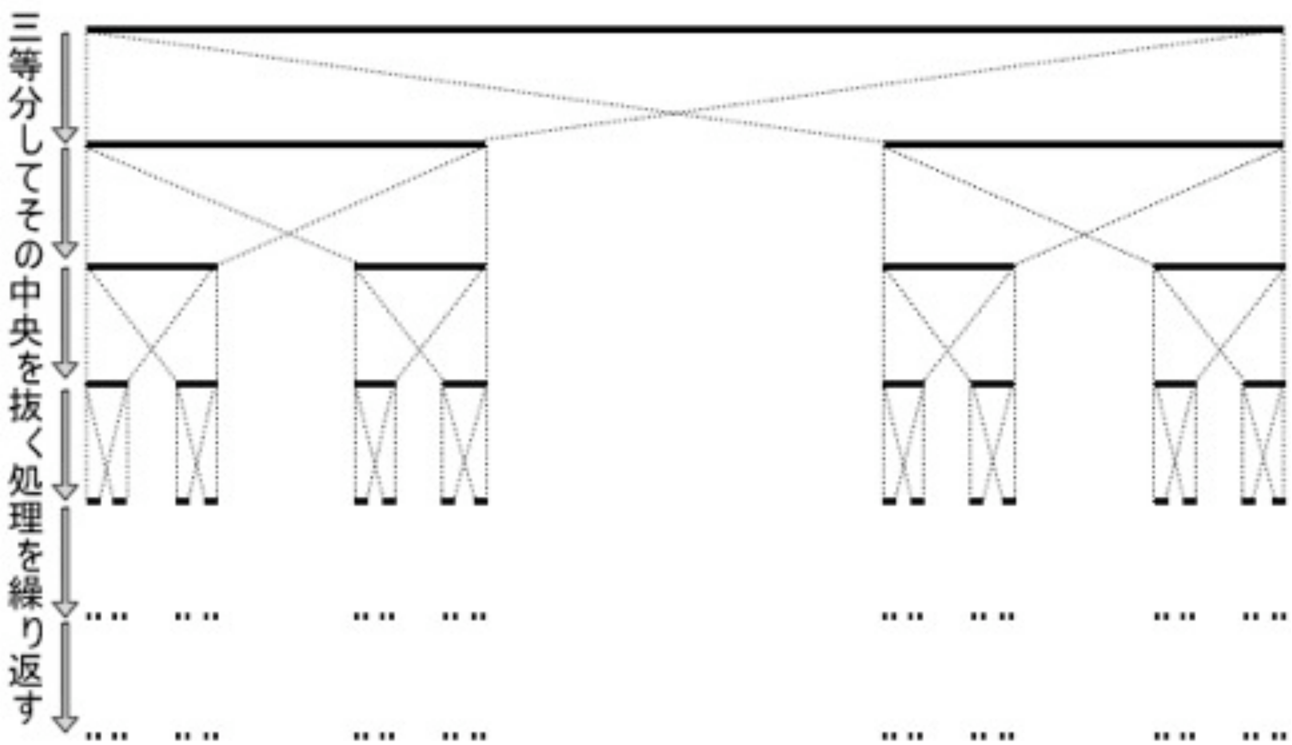
A$^\infty$の元を利用しA$^\infty$の元を定義している！

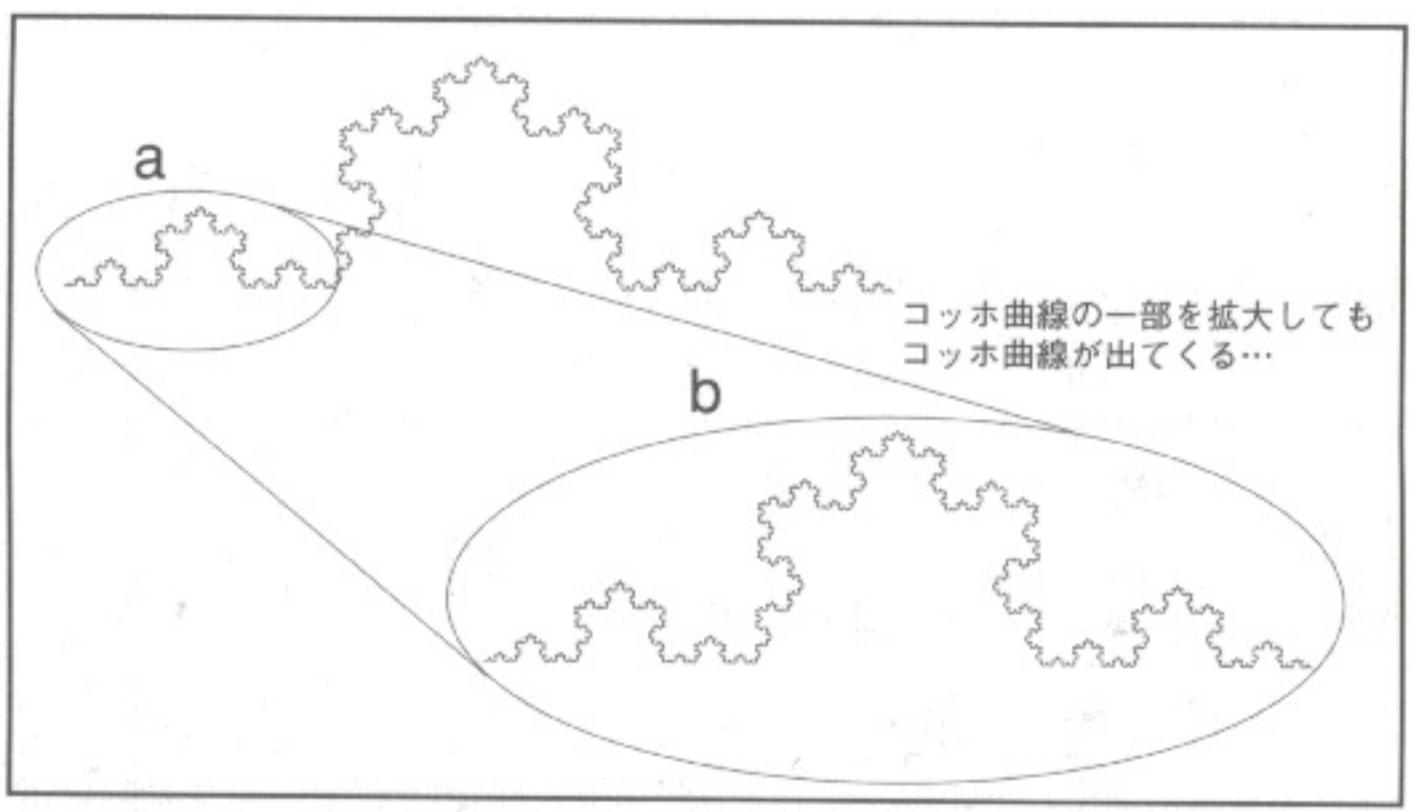
帰納法と余帰納法の比較

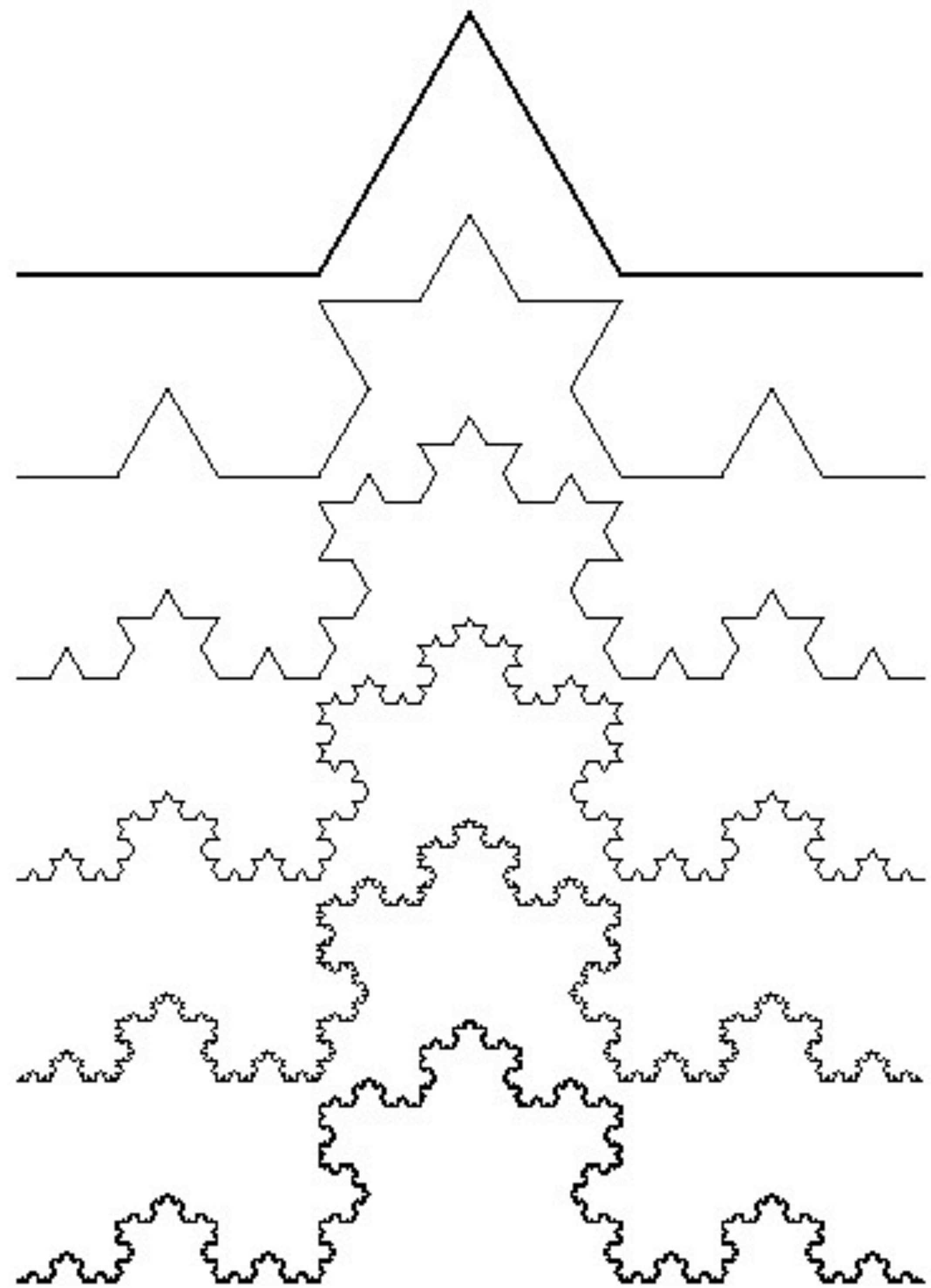
- 帰納的理論では無限を扱う際に強い証明力が必要
  - ZFなど超準帰納法によりΦから積み上げて無限集合を構成
  - 実無限
- 余帰納的理論では比較的弱い証明力しか持たない理論上で可能
  - 自分自身を使って自分自身を定義できる（ある程度の循環性の許容）
  - 潜在的に無限な対象

例：フラクタル図形

自己相似性

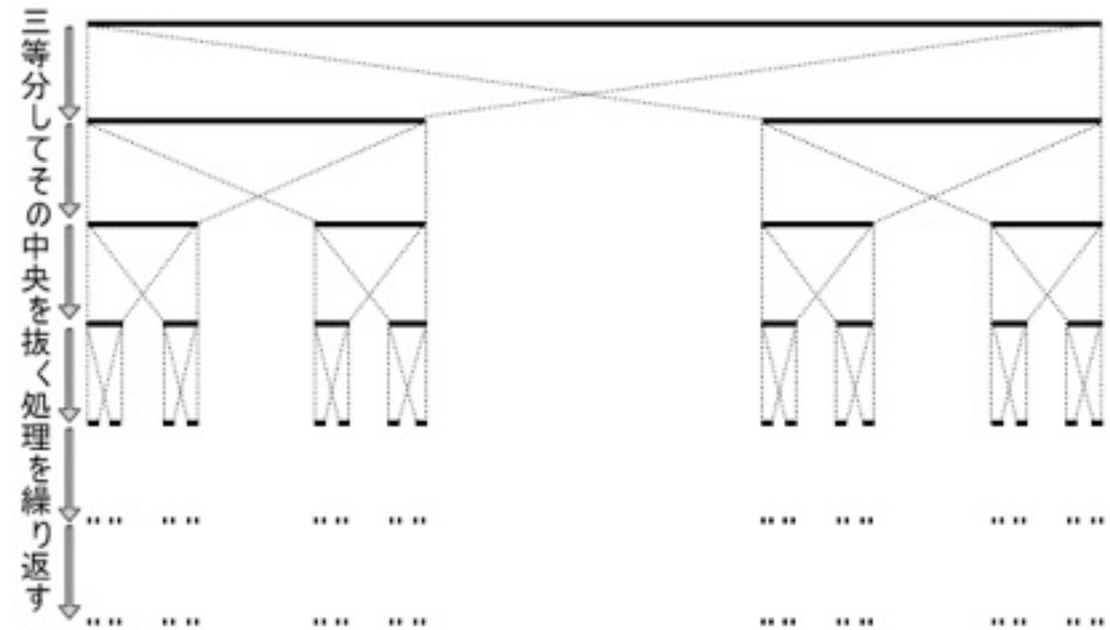




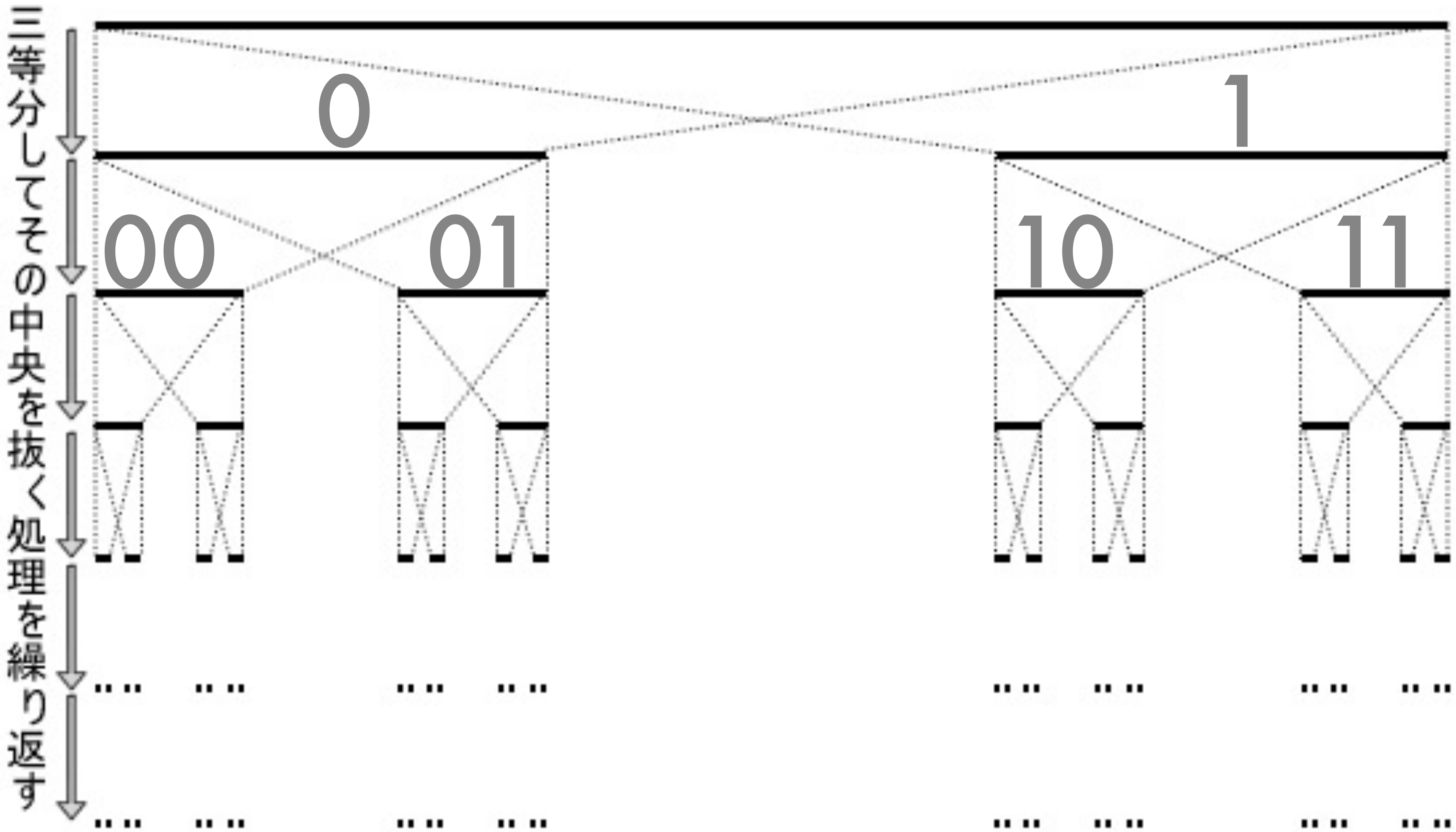


自己相似と余帰納性

- (Larry Moss) 自己相似図形は余帰納的な構成の結果
  - completely iterative algebra になる
- (Hasuo-Jacobs-Niqui) 通常のフラクタル図形と余代数的に定義されるフラクタル図形は相互変換可能



例：カントール集合



- iterated function system I
  - $f_0(x)=x/3$
  - $f_1(x)=(2+x)/3$
- 不動点（attracter）

$C = f_0(C) \cup f_1(C)$

一番端を 000...

二回目で枝分かれを 010...

余代数的表現方法：

symbolic representatrion 2^ω

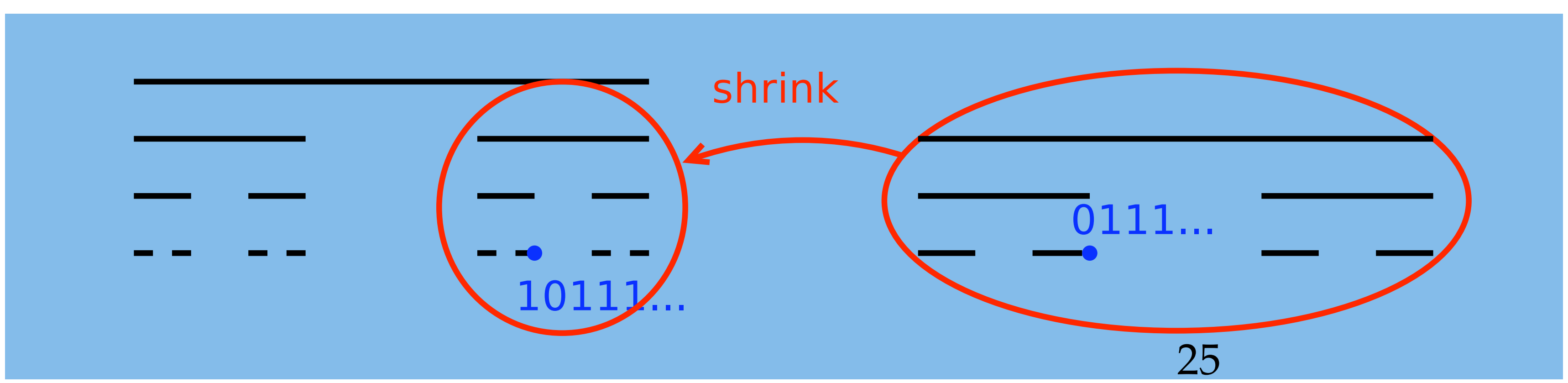
カントール集合の代数系

denotation map $\llbracket 10111\ldots \rrbracket_\chi = \dfrac{2+\llbracket 0111\ldots \rrbracket_\chi}{3}$

$$\begin{tikzcd}
2\cdot 2^\omega \arrow[rr, "2\cdot\llbracket _ \rrbracket_\chi"] & & 2\cdot \mathbb{I} \arrow[d, "\chi"] \\
2^\omega \arrow[u, "\iota", "\cong"'] \arrow[rr, "\llbracket _ \rrbracket_\chi"'] & & \mathbb{I}
\end{tikzcd}$$

相互変換可能

＝左の図式がコミュートする



Hasuo-Jacobs-Niqui

カントール集合の代数系

denotation map $\quad [\![10111\ldots]\!]_\chi = \dfrac{2+[\![0111\ldots]\!]_\chi}{3}$

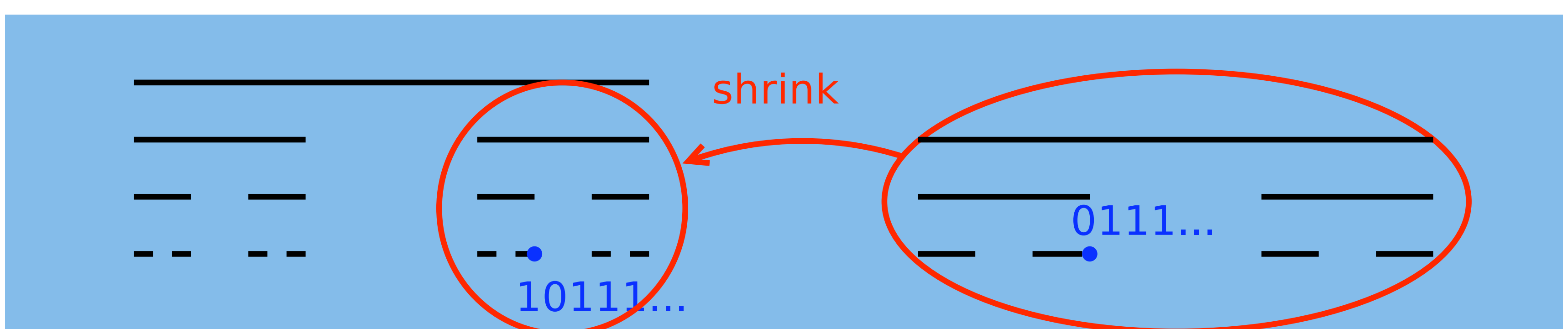
$$
\begin{tikzcd}
2\cdot 2^\omega \arrow[r, "2\cdot[\![\_]\!]_\chi"] & 2\cdot\mathbb{I} \arrow[d, "\chi"] \\
2^\omega \arrow[u, "\iota", "\cong"'] \arrow[r, "[\![\_]\!]_\chi"'] & \mathbb{I}
\end{tikzcd}
$$

余代数的定義

フラクタル図形

相互変換可能

＝左の図式がコミュートする



どこが哲学か

どこが哲学か

- （消極的）数学的技法を使う人はみな関係ある
  - 帰納的構成があたりまえ（基礎的手法）と思っている人
    - 例: 真理定義
      - 帰納的：タルスキ
      - 余帰納的：バルタークなどのゲーム的（代数的）手法
- （積極的）数学とは何かを考える際には重要
  - 自然数概念・構成性概念・計算概念（無限ストリームとしての計算）

今後の話

- ビット列を捉える無限様相論理（佐野）
- 余帰納法の証明論への応用（秋吉）