フレーゲ：論理の普遍性とメタ体系的観点

三平　正明

フレーゲが現代論理学の創始者であることを、今では疑う者はいない。実際、フレーゲは否定や条件法の真理関数的定義を与え、また、多重の一般性を扱えるような仕方で量化の装置を考案した。そして、明確に指定された公理と推論規則を伴う形式的体系（概念記法）を導入して、数学的証明の厳密化を初めて実現してみせた。

しかし、フレーゲの仕事に関して共通の了解が見られるのは、実はそこまでである。より立ち入った評価、特にメタ理論的考察の位置づけを巡っては、著しい見解の相違が見出される。二、三の例を挙げてみよう。ダメットは、フレーゲの仕事と現代論理学との滑らかな接続を主張する。フレーゲは論理的帰結の二つの捉え方（意味論的なものと構文論的なもの）をはっきりとは定義しなかったが、それでもこうした捉え方は、「彼の仕事の中ですぐ手の届くところにある」。というのも、一方で、形成規則、公理、推論規則を伴った形式的体系があり、他方で、形式的展開と区別されてドイツ語で与えられた、形式言語の意味論的説明があるからである。

> それ故、フレーゲは、論理の形式化の健全性ばかりでなく、また完全性という考えを形成するのに必要な諸概念を、手の届く範囲に持っていたことだろう。・・・フレーゲによる論理の形式化のうち文断片は完全であり、同様に一階断片も、同一性を伴った一階述語論理の最初の完全な形式化をなしている。こうした完全性を証明すること、また・・・高階論理の形式化の不完全性を確立することは、フレーゲの後継者達に残された。フレーゲにはこれらの問いを提起する用意があった。だが、彼はそうしなかった。［82］

これに対して、ヘイエノールトやヒンティッカは逆に、現代論理学との断絶、不連続性を強調する。それによれば、フレーゲの体系には「論理の普遍性」という特有な考え方が現れている。すなわち、この体系では、個体変項を束縛する量化子は、一切の対象をその範囲としている。フレーゲの領域（universe）は存在する一切のものから成り、そしてそれは固定され、変更を許さない。このような論理観は重大な帰結をもたらすとされる。

> ［関数が一切の対象に対して定義されるという帰結の他に、］論理の普遍性のもう一つの重大な帰結は、体系の外側では何も言えないし、また何も言う必要がないということである。そして事実、フレーゲは決してメタ体系的問題（無矛盾性、公理の独立性、完全性）を提起していない。［Heijenoort 325f.］

> いかなる一般的なメタ論理も、厳密に言えば、フレーゲには可能ではなかった。同様に、モデル理論も不可能であった。逆に、実在的な論理学においては、一切のモデル理論的あるいは「直観的な」思考様式は回避すべきである。メタ論理が不可能なのだから、メタ言語もそうである。［Hintkka 1］

では、ダメットが主張するように、フレーゲはメタ体系的な問題、例えば完全性を問うために必要な道具立ては持っていたが、ただそれを問わなかっただけだろうか。それとも、フレーゲの場合には、そもそも体系についての問いを提起することは不可能であったのだろうか。いずれにせよ、フレーゲの論理思想を明らかにするためには、このような問題を検討する必要があるだろう。ここでは、フレーゲにとってメタ体系的観点がどのような位置を占めるのか、改めて考察してみる。そしてその際には、現代論理学との連続性を強調する見方も、またメタ体系的観点の不可能性を主張する見方も、ともに修正を要することを示してみたい。

I

まずは、フレーゲの論理観では、メタ体系的問題を提起しえないのかどうかを検討しよう。そのためにここでは、不可能性を主張する人々の見解を大まかに振り返ってみる。

こうした人々は、従来顧みられなかった、論理学の二つの伝統――論理主義の伝統と論理代数の伝統――の相違に注意を促す。論理代数の流れでは、論理学は特定の対象領域を持たず、「主題中立的」である。その都度必要とされる議論領域が設定され、それと相対的に論理学の命題は解釈される。こうした着想がモデル理論的考察につながり、それによって初めて、完全性等のメタ論理的成果を得るのに不可欠な意味論的前提が得られたのである。

だが、論理主義の伝統はそれとは全く異なる。たしかに、フレーゲやラッセルにとっても、論理学は、動物学や天文学が扱うような個別の対象や属性を研究するわけではない。しかし、それが意味するのは、論理学が特定の主題を持たないということではない。そうではなく、すべての対象、すべての属性に当てはまる普遍的な法則を探求するという意味で、論理学はまさに特定の主題を持つのである。その主題とはもちろん、存在する一切のもの（everything)、である。事実、ラッセルによれば、「論理学は、より抽象的で一般的な側面であるとはいえ、動物学と同様ありのままに実在世界を扱うものである」[1919:169]。また、フレーゲも論理学を、「真であること（Wahrsein）の最も一般的な諸法則」を扱う「極大科学」[Ricketts] として捉えた。そして、このような見方に基づいて構築される論理体系は、無制限な領域を扱い、すべての演繹的原理の定式化を目指すことになる。

しかしそれは、フレーゲとラッセルが「論理中心的窮境」に陥ることを意味する。つまり、目指す論理体系がその種の性格のものだとすれば、どのようにして彼らは自分の体系について説明を与えうるのだろうか。例えば、論理的原始要素や推論規則の正当性等について説明が必要なように思える。しかし、体系についてそうした説明を与えることは、論理を用いて論理の基礎を説明することだろう。「我々は論理の内部におり、論理を外側から見ることはできないのである」。――このような窮境を回避するためにフレーゲとラッセルが採った手段、それがメタ体系的考察の可能性を否定することであった。実際、ラッセルは、論理体系について独立性を問うのは「特別な誤謬」を犯すことだと主張する[1903:15]。そしてフレーゲの場合でも、体系についての解明（Erläuterung）は、主張力を伴った通常の文を用いてではなく、読者の好意的理解を当てにした示唆（Winke）として与えられる。

というのも、体系の外でなされる語りは、論理法則が適用されるようなものであってはならないからである［Heijenoort, Ricketts］。したがって、フレーゲがドイツ語で与えた解明は、ダメットが言うような意味論的理論ではありえない。理論であるどころか、それは体系への単なる手ほどき、ヒントであり、いったんその役目が果たされれば、投げ捨てられるべきものなのである。

こうして、フレーゲやラッセルにとっては、メタ体系的考察への扉は閉ざされ、唯一可能なのはただ体系の中で定理を導くことでしかない。この観点から見れば、フレーゲやラッセルの伝統は「論理学上異質な伝統」なのである。

II

おおよそこのような形で繰り返されてきた議論には、正しい指摘と誤った指摘が混在しており、それらを区別する必要があると考えられる。

こうした議論のうち、「論理主義の伝統ではなく、論理代数の流れがモデル理論的考察を生み出した」という指摘は、たしかに正しく重要である。例えばレーヴェンハイムは、モデル理論における最初の主要なメタ定理を証明した。「いかなる消散可数等式（Fluchtzählgleichung）も、すでに可算思考領域（Denkbereich）において、もはや関係係数の任意の値に対して充足されるとは限らない」［450］。（「可数等式」は、同一性を伴った一階述語計算の式にほぼ相当し、そして「消散等式」とは、妥当ではないが、しかし有限的には妥当な等式のことである。）ここには、関係計算の式を方程式と見なし、そしてその解として、当の式を充足する「思考領域」と「関係係数への付値」を求めるという発想がある。このような発想は、明らかに論理代数の流れ、直接にはシュレーダーに由来する。実際、論理学が主題中立的で、その議論領域に応じて命題が解釈されるのだとすれば、そこから逆に、命題を充足する議論領域と付値を求めるという考え方は自然に出てくるからである。

また、フレーゲが論理代数派の見方に理解を示さなかったという点も正しい。例えばシュレーダーは、（絶対的な普遍クラスが矛盾を含むと論じた後で、）その都度必要な普遍クラスを思考領域としてとり、そこで式の解釈を行うべきだと提案した。したがって、シュレーダーの場合には、量化の説明も思考領域（延長領域）に明示的に言及して与えられる。「延長領域の中に、Ａｕ＝１となるようなｕが一つでもありさえすれば、それだけですでに言明Σｕ Ａｕには真理値１が帰属する・・・」［37］。こうした提案に対するフレーゲの論評は、明らかに否定的であった。思考領域をその都度限定することは、「論理学の法則が無際限の妥当性を有する」ことに反する。そして、思考領域ごとに記号の意味が変動するという「不便さ」が生じてしまう［1895:440］。

しかしその一方で、論理主義の伝統に対する評価は、妥当性を欠くように思われる。普遍主義的な論理観のゆえに、メタ体系的考察は不可能となり、そのような語りは「示唆」であることを余儀なくされる。これが与えられた評価であった。しかし、（ラッセルの場合は別にしても、）フレーゲについてはこうした評価は当てはまらない。実際に『算術の基本法則』を見ると、メタ的考察を与えていると思われる箇所が少なくとも三つ存在する。一つは、概念記法で採用された推論規則について意味論的正当化を与える場面（Ｉ§§14 ff.）、

もう一つは、概念記法で適正に形成された表現が有意味であることを証明する場面である（Ｉ§§29～31)。そして最後は、実数論においてある概念（正クラス）を特徴づける条件間の独立性を問う箇所である（II§217)。

このうち独立性問題は提起されただけで、解決は与えられなかったから、フレーゲがそれをどのような手段で解決しようとしたのかは不明である。そのため、この箇所はメタ的考察を与えているのではなく、フレーゲには、体系の中で命題が導けるかどうかを試すという「実験的方法」しかないと反論されるかもしれない。しかし、有意味性証明の方はそうした反論を許さない。ここでは、フレーゲは概念記法の形成規則、原始関数名の意味論的約定に明示的に言及し、そして有意味性の基準を与えた後で、帰納法を用いて証明を試みている。(帰納の基底は、原始関数名が有意味であること、ステップは形成規則が有意味性を保存することである。）そして、このような証明に成功すれば、概念記法で証明される命題は「真」を意味するから、概念記法の無矛盾性が帰結するはずであった。(実際、フレーゲはラッセル宛書簡の中で、パラドクスの出現により有意味性証明が失敗したことを直ちに認めた。）フレーゲのこうした考察は、「体系を眺めて論じうるような外部の観点はありえない」[Goldfarb 353] という評価が誤りであることを、はっきりと示しているだろう。

先の議論がフレーゲに誤った評価を与えた原因の一つは、「論理の普遍性」というテーゼの捉え方にある。これは、メタ体系的観点の不可能性を示すものではない。むしろ、事態は逆である。もし論理学が本当に一切のものを扱い、論理法則が普遍的に適用可能であるべきだとすれば、概念記法についての語りも、それ自体、論理によって規制されなければならないはずだろう。つまり、このテーゼを文字通りに解すれば、そこから帰結するのは、こうした語りが「直観的な論理を欠く」のではなく、論理に従うということなのである。

第二に、体系について語ることが直ちに「論理の外に出る」ことと同一視されている。このような同一視がなされれば、たしかにフレーゲは「論理中心的窮境」に陥ることだろう。単純な例を挙げれば、第一推論様式（ＭＰ）の正当化を、フレーゲは次のように与えた。

> 命題‘$\vdash\begin{matrix}\Gamma\\\Delta\end{matrix}$’と‘$\vdash \Delta$’から‘$\vdash \Gamma$’が推論できる。というのは、もし$\Gamma$が真でなければ、$\Delta$は真である故、‘$\vdash\begin{matrix}\Gamma\\\Delta\end{matrix}$’が偽となってしまうだろうからである。（Ｉ§14）

ここで、もし推論規則の正当化に「論理を前提しないこと」を要求するならば、正当化を与えることは不可能となり、まさしく「窮境」が出現する。しかし、この場面で求められているのは、その種の過大な要求に応じることではない。ただ、体系に採用された推論規則について、その真理保存性を示すことによって正当化を与えることだけなのである。

III

以上のように、「体系の外では何も語りえない」という評価は、実際には正しくないと考えられる。だが、メタ体系的観点はあるにしても、それはフレーゲにとってどのような位

置を占めるのか、換言すれば、何か独自な理論として展開される可能性があるのか。次に、フレーゲ－ヒルベルト論争を取り上げて、その点を検討してみよう。

ヒルベルトの『幾何学の基礎』は、公理主義的数学観、公理による原始語の陰伏的定義、等々の豊かな着想を含んでいるという点で、画期的なものとされる。フレーゲとの論争もそのうちのいくつかの点を巡って行われたが、目下の文脈で特に問題となるのは、ヒルベルトのメタ理論的考察である。ヒルベルトは、（実数論の無矛盾性と相対的に）幾何学の無矛盾性を、そして各公理の独立性を証明した。こうした証明はモデル論的手法で与えられている。例えば独立性証明について言えば、公理$A_1, ..., A_n$を真とするが、公理Cは偽とするような解釈を挙げることによって、Cが$A_1, ..., A_n$から独立であることを示したわけである。二人の論争には後にコルゼルトも加わったが、コルゼルトはシュレーダーやレーヴェンハイムとともに論理代数派を成すから、基本的には「解釈（Deutung）」に基づくヒルベルトの手法を支持した［Korselt］。

しかし、フレーゲの目には、「数学的理論の論理的本性への洞察」が彼らには欠けていると映る。問題となるのは、公理の捉え方である。ユークリッド以来の伝統では、公理とは、論理的推論の連鎖で証明しえない、一つの確定した真なる思想を表現する命題である。より正確には、公理とはこうした思想そのものであると言ってよい。フレーゲもこの伝統的な見方に賛同する。だが、この観点から見れば、同一の公理がある状況下では真となり、別の状況下では偽となるといったことはありえない。そのため、フレーゲは、伝統的見方に基づく限り、ヒルベルトが与えた無矛盾性や独立性証明は失敗していると考えた。実際、無矛盾性の証明では、「点」、「直線」、「上に位置する」といった表現（定項）を再解釈して、実数を用いたモデルが構成される。しかし、その可能性は今や存在しない。それどころか、「公理は真であるから、公理が互いに矛盾することはない。この点は証明を要さない」ことになる。独立性証明の場合も同様である。この場合は、さらに悪いことに、「偽なる公理」が登場する。「「公理」という語を本来の意味で解する限り、偽なる公理などというのは、まさにあのカスタンの蝋人形館に、斜角の直角と並べて陳列しておくだけの価値がある」［1906:424］。

このように、伝統的な見方に基づく限り、ヒルベルトの仕事は失敗していると見なさざるをえない。そこで、フレーゲは、それをもっと好意的に解釈する代替案を提示する。その代替案とは、ヒルベルトが「幾何学の論理化」を行っていると見なすものである。ヒルベルトの命題を本来の公理と見なせば、そこに登場する「点」、「直線」といった表現は、予め固定された意義（よってまた意味）を持つと考えざるをえない。だが、ヒルベルトは可変的な意味（ユークリッドの意味での点、数の対としての点）について語る。とすれば、「点」、「直線」等は定項のように見えるが、実際には変項である。この観点から、フレーゲはヒルベルトの理論を再定式化する。

ヒルベルトの理論において、「点」、「直線」等を述語変項と見れば、理論に固有な定項はなくなる。そして、理論の公理や定理は、もはやそれ単独では思想を表現する本来の命題ではなくなり、「非本来的命題」、すなわち、疑似公理や疑似定理となる。さて、理論の定理は固有な公理から証明されていたわけだから、各定理を次のような命題で置き換えてみる。すなわち、疑似公理全体の連言を前件とし、そして疑似定理を後件とする仮言をつくり、その上で、その全称閉包を（当該の述語変項について）とることで得られるような命

題である。すると、この命題は思想を表現する本来の命題となり、二階論理だけで証明される論理的真理となるだろう。そこで、フレーゲが再定式化として提案するのは、ヒルベルトの理論をこのような命題の集合と見ることであった。このとき、定項に対するヒルベルトの解釈の方法は、「一般から特殊への推論」の事例として捉え直されることになる。すなわち、「解釈」とは、当該の全称命題に現れる述語変項を有意味な述語で例化することである。例えば、ユークリッドの意味における述語で例化すれば、一つの仮言が得られ、そして、ユークリッドの公理は真であるから、前件は除去されて、通常の定理が得られることだろう。

しかし、このように再定式化してみても、ヒルベルトの独立性証明はやはり失敗している。目標は、公理Cが残りの公理$A_1, \ldots,\ A_n$から独立であることを示すことである。だが、目下の再定式化では、各公理は疑似公理だから、$A_1, \ldots,\ A_n$の連言を前件とし、Cを後件とした仮言の全称閉包について、それを偽とする事例があるかどうかが問題となる。そのような事例があれば、Cは独立していることになる。だがこの場合、示されたのはもちろん、思想を表す本来の命題の独立性ではなく、二階の関係（フレーゲの言い方では、広義の徴表）の独立性でしかない。無矛盾性証明の場合も同様である。

以上、ヒルベルトに対するフレーゲの批判を見てきた。たしかに、「幾何学の論理化」というフレーゲの分析は、それ自体としては見事なものだが、しかし現代の観点から見れば、フレーゲの批判は全体としてヒルベルトの「解釈」という手法を捉えておらず、逆に多少奇異の念を呼び起こすものだろう。実際、ヒルベルトとの論争は、モデル理論的発想に対するフレーゲの無理解を示す典拠の一つとされてきた。だが、そもそもフレーゲはなぜこうした発想を拒否するのだろうか。詳しく言えば、フレーゲの見方では、「点」は意味が不変の定項であるか、あるいは変項であるかのいずれかでしかない。しかし、なぜ定項としての再解釈を考えてはならないのだろうか。

この問題に対するフレーゲの一つの回答は、再解釈を認めると多義性が生じてしまうということである。解釈は、「記号の一意性という、論理学が音声言語や文字言語に対して課すべき最高原則」と矛盾する［1906:384］。だが、こうした回答が説得力を欠くのは明らかだろう。なぜなら、解釈という隠れたパラメタを指定すれば、それと相対的に、この最高原則は遵守されるからである。したがって、すでにシュレーダー批評で見たように、この文脈でフレーゲが言いうることは、せいぜい、再解釈を認めると「不便さ」が生じるということでしかない。

しかし、フレーゲはもう一つの回答を持っていたと考えられる。

> 我々が無条件に遵守すべき記号の一意性は、異なった諸解釈を排除するが、それでも、もしかすると記号や記号の集まりは解釈できる［と言われる］かもしれない。しかしながら、そもそも推論とは、記号によって構成されるのではない。我々にせいぜい言えるのは、時として、ある記号の集まりから別の新しい記号の集まりへの移行という形で一つの推論が外面的に定式化される、というだけのことである。推論は決して記号の領域に属する事柄ではない。そうではなく、推論とは・・・判断を下すことに他ならない。推論の前提はどれも、真であると承認されたある確定的な思想であり、同様にまた、結論となる判断においても、ある確定的な思想が真であると承認される

　のである。ここには異なった解釈の余地など一切ない。［1906:387］

ここで、「推論とは判断を下すことだ」というフレーゲの発言は、文字通りに解されなければならない。フレーゲによれば、判断とは「思想の真理性の承認」である。そして、こうした判断が推論の各前提と結論をなす。そのため、フレーゲは、論理代数派には見られない独自な記号、判断線「｜」を論理体系の中に導入した。「Φ(Δ)」は、単にΦ(Δ)という思想を表現し、またそれにより真理値を表示するにすぎない。だが、「├ Φ(Δ)」においては、この思想が真として主張される。フレーゲが「概念記法命題、あるいは簡単に命題と呼ぶのは、記号「├ 」を用いて判断を概念記法で表記したもの」［1893§5］に他ならない。とすれば、フレーゲの意味における命題が再解釈を受けつけないのは、明らかだろう。つまり、たしかに「Φ(Δ)」自体は様々な解釈を許すかもしれない。しかし、「├ Φ(Δ)」は再解釈を許さない。なぜなら、それで表明される判断においては「ある確定した思想」が問題となっており、判断と独立に内容だけを動かすことは不可能だからである。
　フレーゲが論理体系の中に判断線を固有な記号として導入したことは、様々に批判されてきた。例えば、ウィトゲンシュタインはこう述べている。

> 「├ 」というフレーゲの「判断線」は、論理的には全く無意味である。フレーゲ（とラッセルにおいて）判断線は、単に、この著者達がそう表記された命題を真と見なしていることを告げるにすぎない。それ故、例えば、命題の番号が命題構成に属さないのと同様、「├ 」も命題構成に属さないのである。［『論考』4.442］

たしかに、判断、主張という要素は通常の論理学には属さないのかもしれない。しかし、フレーゲの観点から見れば、われわれの推論活動は、判断を基本単位として、よってまた主張文を用いて行われる。そのためにフレーゲは、論理体系自体の中に判断・主張を固有な要素として導入しようとした。「├ 」は、この意味でフレーゲの論理学の独自さを表しており、そして、そうした独自性がヒルベルトのモデル論的発想を拒否した理由であると考えられる。

Ⅳ

　以上のように、フレーゲはいわば「判断の論理学」という観点から、解釈に基づくヒルベルトのメタ理論的考察を批判した。だが、意外にもフレーゲは最後の段階で、次のような問いを提起する。「ヒルベルトの成果から出発して、本来的公理の独立性の論証に到達することは可能ではないのか」［1906:423］。この問いに対するフレーゲの回答は、到達可能だというものであると考えられる。ここでは、フレーゲによる独立性証明を取り上げて、フレーゲ流のメタ理論の可能性を多少とも検討しよう。
　上で触れたように、独立性の問題が改めて考察されるが、そもそもこの種の考察は、フレーゲにとってどのような位置を占めるのだろうか。この点に関しては、次のように述べられている。

ある本来的公理がある本来的諸公理のグループから独立であることを証明するのは、可能なのか。この問いは、次のような別の問いに帰着する。ある思想がある思想のグループから独立であることをいかにして証明しうるのか。まず指摘しておきたいのは、この問いによって我々が、ふつう数学にとっては無縁な領域へと踏み込んでいるということである。なぜなら、他の諸学と同様、数学の営みもまた思想においてなされるにしても、通常はやはり、思想そのものが数学の考察対象となることはないからである。また、ある思想がある思想グループから独立であるという関係も、ふつう数学で研究されているような関係とは全く異なるのである。そこで、次のように予想することが許されよう。この新しい領域はそれ固有の根本的な諸真理を有しており、これらの真理は、幾何学的公理が幾何学の証明にとって不可欠なように、この領域で行うべき証明にとって不可欠である。特にまた、ある思想がある思想グループから独立であることを証明するために、我々はこのような根本的真理を必要とする、と。[1906:425f.]

幾何学のような通常の数学的理論では、ある思想（よってまた本来の命題）を公理として提示するか、証明を通じて定理として確立する。ところが、「新しい領域」は、理論で確立される思想（本来の命題）の関係を考察し、そして、この領域はそれ固有の根本真理を備えているとされる。とすれば、メタ体系的観点の不在どころか、フレーゲには、そうした観点を理論として展開する用意があったことは明らかだろう。

さて、目下の文脈では、思想の独立性とは何か、また、根本真理として何が必要かという点が明らかにされなければならない。手短に言えば、ある思想Gがある真なる思想のグループΩに依存するのは、Gが一連の論理的推論のみを用いてΩから証明できる場合であり、さもなくば、GはΩから独立である。ここで、前提として「真なる思想」のみを考えている点が奇異に感じられるかもしれない。しかし、それは「判断の論理学」の一つの帰結である。そして、こうした独立性の定義は、（フレーゲは認めていないが）ヒルベルトのものと同じである。

根本真理については、二、三の事例が挙げられているだけである。そのため、フレーゲの新領域は萌芽的なものに留まっているが、独立性を証明する基本的な着想は示されている。まず、フレーゲは「語彙対照表」を作成する手続きを示し、その上で一つの根本法則を挙げている。語彙対照表は次のように作成される。いま、意義（よって意味）をすでに持っている一つの言語をとる。対照表の左右の欄にそれぞれ、この言語のすべての語を掲載していくが、このとき、左右の欄の同じ行に語を一つずつ書き込んで、どちらの欄にも同じ語の重複した掲載がないようにする。但し、語と語の対応づけは、二つの条件を満たさなければならない。一つは、固有名には固有名、一階の概念語には一階の概念語というように、対応づけが論理的タイプを保存するという条件であり、もう一つは、論理語がそれ自身と対応づけられるという条件である。根本法則はこうした対照表を用いて設定されている。

いま、ある思想Gがある思想グループΩに依存するかどうかが問題となっているとしよう。我々がこの問いを否定できるのは、我々の語彙対照表を用いると、グループΩの思想にはグループΩ′の真なる思想が対応するが、思想Gには偽なる思想G′が対応する

場合である。［1906:428］

すなわち、フレーゲの着想とは、置換（permutation）に訴えたものである。意義を持った言語ＬからＬへの置換σで、先の二条件を満たすものを考える。一つの置換が一つの語彙対照表を与える。すると、思想Ｇが真なる思想のグループΩから独立であるのは、（略記すれば、）ある置換σ（語彙対照表）が存在して、σ(Ω)は真なる思想のグループであるが、σ(Ｇ)は偽なる思想の場合である。

今や、この新しい枠組から、先の問い――「ヒルベルトの成果から出発して、本来的公理の独立性の論証に到達することは可能ではないのか」に答えることができるだろう。例えば平行線公理の独立性を示すために、ヒルベルトは、「通常の幾何学の点、直線および平面のうち、一つの固定した球の内部にはいる部分だけを空間幾何学の要素として選び、この幾何学の合同は、この固定球をそれ自身に移す通常の幾何学の１次変換によってきめる」という方法をとる［§10］。すると、フレーゲは、通常の幾何学の点や直線の表現を固定球における点や直線の表現に対応させ、そして、「合同である」という表現を「固定球をそれ自身に移す１次変換で移される」に対応させるような置換を考えることになろう。こうして、再解釈に訴えなくともフレーゲの枠組で、独立性証明は達成されると考えられる。

ここで、フレーゲの着想とモデル理論的発想を比較してみよう。相違点は、すでに見たように、フレーゲの着想では解釈の余地がないということであった。だがその一方で、類似性も見られる。ある理論のモデルを考察するとき、もちろん論理定項の意味はすでに固定されているから、定項について解釈がなされる。このことは、ちょうどフレーゲの着想で、論理定項を動かさない置換を考えることに対応している。したがって、実際には、モデル理論的発想の少なからぬ部分は、フレーゲの枠組でも捉えられることになる。とすれば、この枠組で、単に独立性にとどまらず、一連の重要な意味論的概念を特徴づけることが期待されよう。例えば、フレーゲの観点から論理的帰結を特徴づけることは容易であるし、また、論理的真理もその特別な場合として特徴づけられるだろう。

フレーゲの考察の歴史的位置づけにも少し触れてみよう。幾何学史に造詣の深い［Tappenden］の研究によると、フレーゲはエルランゲン・プログラムをすでに知っており、「置換の下で不変」という考えに慣れ親しんでいたとのことである。すると、フレーゲはそこから着想を得て、論理的帰結や論理的真理等を、置換の下で不変なものとして捉えようとしたのかもしれない。いずれにせよ、論理代数派が「方程式を解く」という発想からモデル理論的考察を生み出していった時期に、フレーゲは「置換」に訴えて独自な考察を行っていたと言ってよいだろう。さらに、フレーゲ－ヒルベルト論争の（目下の側面の）評価については、フレーゲがヒルベルトの画期的方法を理解しえなかったとも、また、フレーゲの方がそれをヒルベルト自身よりもよく理解しえたとも言えない。むしろ、フレーゲは独自な論理観と手法に基づいて、ヒルベルトに対峙したと言うべきである。

次に、「新領域」という構想の問題点を手短に検討する。置換の方法は、論理的帰結の一つの特徴づけを与える。そこで、論理的帰結に関するタルスキの考察［Tarski］を参照しながら、フレーゲの構想の課題を探ることにしよう。

論理的帰結の意味論的定義を与えるために、タルスキは考察の出発点として、この概念の直観的な内容を記述する。文のクラスＫから文Ｘが論理的に帰結するとしよう。このと

き、直観的な観点からは、Kの文がすべて真であって、Xが偽であるようなことは起こりえない。また、この帰結という関係は形式的なものであって、経験的知識、特に、Kの文やXが言及する対象の知識はそれに影響を及ぼさない。必然性と形式性は同一の概念ではないから、ここでは実際に二つの条件が挙げられたと言ってよい。(必然的帰結が形式的だとは限らない。)

その上で、タルスキはこの二条件を満たす意味論的定義を与えようとする。二つの試みがなされている。一つは、形式性から自然に考えつく次の（F）である。

（F）Kの文とXにおいて、論理外の定項に、同じタイプの他の任意の定項を代入した結果をそれぞれK′とX′とする。このとき、K′のすべての文が真であるならば、X′は真でなければならない。

形式性とは、帰結関係が文の論理形式、よって論理定項にのみ依存するということである。だから、論理外の定項に、他のいかなる対象表現を代入しても、帰結関係に影響はないはずである。それを反映した試みが（F）である。もう一つは、代入ではなく、モデルに訴えた試みである。この時点のタルスキの説明によると、まず、クラスLのそれぞれの文に現れる論理外の定項を変項で置き換えて、文関数を作る。そして、これらの文関数を充足する対象列がLのモデルである。

（G）クラスKのすべてのモデルがまた、文Xのモデルである。

周知のように、タルスキが最終的に採用したのは（G）である。その理由は、直観的な意味の論理的帰結にとって（G）が必要十分条件を与えるのに対し、（F）は必要条件しか与えないという点にある。目下の文脈に関係があるのは、（F）の不十分さである。（F）の基準は、明らかに、問題となる言語の表現能力に依存している。そのため、言語的資源が乏しければ、直観的には論理的に帰結しないケースが肯定的に判定されてしまうだろう。

さて、フレーゲももちろん、必然性と形式性を満たす基準を考えていたはずである。(フレーゲの言い方では、それは「論理法則の形式的な本性の発露」である。)その基準は、

（＊）σ(K)を真とするすべての置換σにおいて、σ(X)は真である

となる。だが、（＊）は（F）に相当するから、その不十分さを引き継いでいるように思われる。フレーゲは当該の箇所で、「論理的に完全な言語」に言及している。このような言語は、すべての意義と意味を語りうるようなものなのだろうか。いずれにせよ、フレーゲの新領域がモデル理論に比肩しうるためには、この問題の解決が不可欠だろう。

次に、フレーゲがはっきりと言明し、また後にタルスキも直面した問題がある。それは、論理定項とは何かという問題に他ならない。フレーゲの枠組で、もし論理語が誤って論理外の語に置換されたとしたら、当の論理語に関する法則が右欄では成立しなくなるため、本来は独立でないケースが肯定的な判定をうける可能性がある。したがって、論理語とそれ以外の語を正確に区別すること、すなわち、「論理学に本来属するものとは何であるのか」

に答えることが不可欠である。これは、タルスキにとっても避けられない問題である。

> 我々の構成全体の基礎にあるのは、問題となる言語のすべてのタームを論理的なものと論理外のものに分類することである。もちろん、この分類は全く任意だというわけにはいかない。例えば、含意記号や全称量化子を論理外の記号に含めたとしたら、帰結概念の我々の定義は、日常の用法と明らかに矛盾する結果に通じることだろう。その一方で、タームの二つのグループの間に明確な境界線を引くことを許す客観的な根拠を、私は何も知らないのである。［Tarski 418］

論理定項とは何かという問題に規約によって答えるとしたら、それは満足のいく回答ではないだろう。結局のところ、論理的帰結といった概念が、それぞれの規約に相対的なものとなってしまうからである。望ましいのは「客観的な根拠」である。このとき、フレーゲが論理的考察の場面に導入した「置換の下で不変」という考えが、一つの重要な手掛かりを与えるだろう。簡単な例として、「量化子条件」として知られているものを取り上げよう。量化子は、議論領域の個々の対象の区別には関知しない。そこで、二階の概念語（Ｑｘφｘ）が量化子であるためには、それは、議論領域上の置換の下で不変、という条件を満たすべきだと考えられる。(すなわち、任意の構造Ａと任意の式Φｘに対して、ＱｘΦｘがＡで真であるのは、任意の式Ψｘに対し、その外延を議論領域のある置換によりΦｘの外延から得られた集合とすれば、ＱｘΨｘがＡで真となる場合、またその場合に限る。）すると、量化子の場合に見られた考えを拡張して、それを論理定項の基準とするという可能性が生まれる。フレーゲの場合で言えば、論理語を保存した置換によって、独立性を判定する枠組が与えられた。しかし今度は逆に、置換の方から、論理語とそれ以外の語の分類を与える可能性が生じるだろう。このような可能性を検討することは、論理の本来の領分を定めるという、興味深い課題だと思われる。

以上、フレーゲのメタ体系的考察を検討してきた。今や、出発点となった、相反するフレーゲの評価が修正を要することは明らかだろう。フレーゲにはいかなるメタ論理もありえないという評価は、誤っている。また、フレーゲの考察は現代論理学と直ちにはつながらない。むしろ、論理代数の流れと同時期に、フレーゲは、それとは異なる独自な観点から、メタ体系的考察を「新しい領域」として構想していた。このような構想には、特有の困難（先に言及した最初の問題点）と同時に、論理定項とは何かに関わる興味深い着想がある。このうち、後者を検討することが残された課題である。

文献

M. Dummett, *Frege : philosophy of language*.

G. Frege, Grundgesetze der Arithmetik, Bd. I, 1893, Bd. II, 1903.野本・横田・金子訳『算術の基本法則』フレーゲ著作集３。

――Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schroders *Vorlesungen uber die Algebra der Logik*, 1895.**藤村・大木島訳「E．シュレーダー『論理代数講義』における幾つかの点についての批判的解明」著作集５**。
――Über die Grundlagen der Geometrie, 1906.**田村・岡本・長沼訳「幾何学の基礎について**［1906］**著作集５**。
W. D. Goldfarb, Logic in the twenties : the nature of the quantifier, 1979.
J. van Heijenoort, Logic as Calculus and Logic as Language, 1967.
D. Hilbert, Die Grundlagen der Geometrie, 1899. **寺坂・大西訳・解説『ヒルベルト幾何学の基礎』**。
J.Hintikka, On the development of the model-theoretic viewpoint in logical theory, 1988.
L. Lowenheim, Über Moglichkeiten im Relativkalkul,1915.
A. Korselt, Über die Ggrundlagen der Geometrie, 1903.
T. G. Ricketts, Frege, The Tractatus, and the Logocentric Predicament, 1985. **中川訳「フレーゲ・『論考』・論理中心的窮境」『現代思想』**1998 **年**。
B. Russell, *The principles of mathematics*, 1903.
――*Introduction to mathematical philosophy*, 1919. **平野訳『数理哲学序説』岩波文庫**。
E. Schroder, *Vorlesungen uber die Algebra der Logik*, vol. III, 1895.
J. Tappenden, Metatheory and mathematical practice in Frege, 1997.
――Frege on axioms, indirect proof, and independence arguments in geometry, 2000.
A. Tarski, On the concept of logical consequence, 1936［1983］