スコーレムの計算可能性概念に関する仮説

村上祐子

トラルフ・スコーレムは主としてノルウェイで活動していた数学者であり、量化概念の形式化を中心的動機として研究を進め、論理・代数・数論にその名を残している。とりわけここでは原始帰納関数の形式化に注目したい。小川さんが述べられたように、チャーチ・ゲーデル・チューリングのテーゼを勘案すると、帰納関数での計算可能性はチューリングマシンでの計算可能性と同一視され、さらにそれは直観的計算可能性と同一視される。

さて、スコーレムの他の業績を考慮に入れると、原始帰納関数の形式化をどのように位置づけられるだろうか？ここでは、数学の基礎に関するものと階層理論を勘案して、仮説を述べたい。

1 数学の「健全性」

時代的に、スコーレムは「数学の危機」に対する問題意識を持っていた。彼自身の考え方はヒルベルトの形式主義を批判しているが、形式化の手法を受け入れる点ではヒルベルトに近い。ヒルベルトのいうような「整合性」を数学の明晰性の基準とするのは不足だとスコーレムは考える[1]。

とりわけスコーレムが問題としたのは、メタ変数の導入にまつわる手法である。新しい変数を導入するならば保存的拡大になっていなければならない。

> All this could seem clear, but the situation is, at least apparently, complicated by the fact that such general results in L may be obtained by verifications in some more extended language L'. Therefore one may ask, is it really necessary to make any appeal to some kind of intuition? Is it not possible to reduce mathematical theories, thus also arithmetic to pure formalism?[2]

ところが、ヒルベルトのように統語論と意味論を区別するのは無限後退を導くとスコーレムは考える。

> It is clear that the difference between the procedure set forth here and that of the Hilbert school is that I recommend to set up formal systems of arithmetic after having first seen by finitary reasoning their consistency or in in other words their conservertive character, whereas Hilbert's system we first ignore the question of interpretation, i.e. first set up a formalism without interpretation and then try

[1] "Probably one can say that the possibility of finitization of a mathematical theory is a criterion of its soundness [11]"

[2] [10], p.547.

> afterwards to prove something called consistency. There are diverse inconveniences by the latter procedure. First of all it has turned out that in order to prove the consistency of a system we must use considerations of a more difficult kind which seems to led us into an infinite regress. Further, questions with regard to interpretation arise which are really very difficult, if at all possible, to answer[3].

つづけて、

> In my opinion propositions containing quantifiers ought only to be introduced as a sort of abstraction of incomplete communication of statements containing free variables only. $\cdots$ Formal rules for the treatment of expression with quantifiers must be so much restricted that we never get outside such an interpretation[4].

一方、チャーチのテーゼを受け入れている点で直観主義に対する不満も表明している。ポワンカレの帰納法と計算概念をまとめて、

> [Poincaré] emphasizes that whereas any numerical proposition is tested by the carrying out of a computation so that a proof of it consists in a verification, the proof of a general theorem requires the use of complete induction. [5].

更に数学の健全性へのアプローチに関しても直観主義は受け入れられないと表明している[6]。

> According to S. C. Kleene this condition is fulfilled in intuitionistic arithmetic. However, since it is well known that the proof of consistency of intuitionistic arithmetic is not easier than that of classical arithmetic, some stronger restriction must be required in order to enable us to see in a finitary manner that we only get correct propositions or in other words a formal system having the conservative property relative to [system] S, [and system] S' [extending S, and theory] Σ, [and its extension] Σ'.

では彼自身は何を数学の明晰性の基準ととるべきだと考えていたのだろうか？原始帰納関数で満足していたのであれば、そう主張していただろうが、その主張は見受けられない。だとすれば他のなにか？

2 階層理論

ここで、スコーレムが階層理論の先駆と見なされていることを思い起こしたい。照井さんも言及されたように、さまざまな階層が提案されているうち、ここでは特に、スコーレムの lower elementary functions と Grzegorczyk 階層とを比較する。

[3]Skolem [10], p.551.
[4]Skolem [10], pp.551-552.
[5]Skolem [10], p.545.
[6]Skolem [10], p.552.

カルマーの提案した elementary functions とは、下記の関数から構成されるものである。

1. *Bounded* sum and product
2. Zero-function
3. Successor
4. Projection
5. Addition
6. Multiplication
7. Modified subtraction

これらで定義される関数のクラスは原始帰納関数のクラスに含まれている。

スコーレム [12] の lower elementary functions とはさらに bounded products を落とすことから得られる。

2.1 Grzegorczyk 階層

Grzegorczyk 関数とは、以下の性質を持つ関数である。

$$
\begin{array}{lcl}
E_0(x,y) & = & x+y \\
E_1(x) & = & x^2+2 \\
E_{n+2}(0) & = & 2 \\
E_{n+2}(x+1) & = & E_{n+1}(E_{n+2}(x))
\end{array}
$$

Grzegorczhyk 関数は以下の意味で単調である: $n \geq 1$ について,

$$
\begin{array}{lcl}
E_n(x) & \geq & x+1 \\
E_n(x+1) & \geq & E_n(x) \\
E_{n+1}(x) & \geq & E_n(x) \\
E_n^t(x) & \leq & E_{n+1}(x+t)
\end{array}
$$

ただし $E_n^t(x)$ は t 回 $E_n(x)$ を適用したもの。

Grzegorczyk 階層 $\mathcal{E}^0$ とは、以下の関数を使って構成される関数のクラスである。

1. The 0 function
2. Successor function
3. Projection functions
4. 以下の操作について閉じている。
   (a) Composition
   (b) Limited recursion

$\mathcal{E}^{n+1}$ はさらに構成する初期関数を追加することによって得られていく。知られている結果：

1. $\mathcal{E}^3$ は elementary functions のクラスである。
2. $\bigcup_{n<\omega} \mathcal{E}^n$ は原始帰納関数のクラスである。

ところが、elementary classes より小さな関数のクラスの性質はまだそれほど知られていない。たとえば、Lower elementary functions のクラスに関しては部分的な結果しかない[7]。

3 仮説

スコーレムは、ヒルベルトの提案を否定するための代替案として、さらに厳しい数学の明晰性の基準を提案したかったのではないか。特に、直観的な計算可能性概念に対応する形式的概念を、より小さな関数のクラスによって表現されるものとして提案したかったのではないか。もしそうであるならば、lower elementary functions のクラスにスコーレムがこれほどこだわったことが説明できる。

4 仮説検証のために

スコーレムの論理学関係の著作は [13] にまとめられているが、哲学関連の著作はほとんど出版されていない（しかもノルウェイ語のものが多いと見られる）。仮説を検証するためには、今後は遺稿研究が必要となる。

References

[1] Burris (1996) *How to spot polynomical time problems for a fixed language L of algebras.* Presentation at University of Szeged, Hungary. `http://thoralf.uwaterloo.ca/htdocs/MYWORKS/TALKS/sztalk.pdf`

[2] Campagnolo (2001) *The complexity of real recursive functions* (Dissertation, U Lisbon)) Available at: `http://www.cs.math.ist.utl.pt/ftp/pub/CampagnoloM/02-C-realrec.ps`

[3] van Heijenoort (1967) (Ed.) *From Frege to Godel: a source book in mathematical logic, 1879-1931.* Harvard UP.

[4] Jervell (1996) Thoralf Skolem: Pioneer of computational logic. *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 1, 107-117.

[5] Mancosu (1998) *From Brouwer to Hilbert.* Oxford UP.

[7] 筆者の知る限りでは Campagnolo [2] の結果が最善である。If it is possible to approximate with a finite sequence of integrals the solution of a Cauchy problem with an a priori polynomial bound, then then FLINSPACE (the class of functions computable in linear space) and Skolem's class of the lower elementary functions are equal.

[6] von Plato (2003) Skolem's discovery of Godel-Dummett Logic. *Studia Logica* 73, 153-157.

[7] Ross (1984) *Subrecursion: functions and hierarchies*. Oxford UP (Oxford Logic Guides 9).

[8] Sieg, Wilfried (1994) Mechanical procedures and mathematical experience. In Alexander George (ed.) *Mathematics and Mind*. Oxford UP. pp.71-117.

[9] Skolem(1947) Development of recursive arithmetic. In Skolem [13].

[10] Skolem(1954) Logical backgrounds of arithmetics. In Skolem [13].

[11] Skolem(1955) A critical remark on foundational research. In Skolem [13].

[12] Skolem (1962) Proof of some theorems on recursively enumerable sets. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 3, 65-74.

[13] Skolem (1970) *Selected Works in Logic*. Jens Erick Fenstad (Ed.) Universitetsforlaget, Oslo-Bergen-Tromsö.